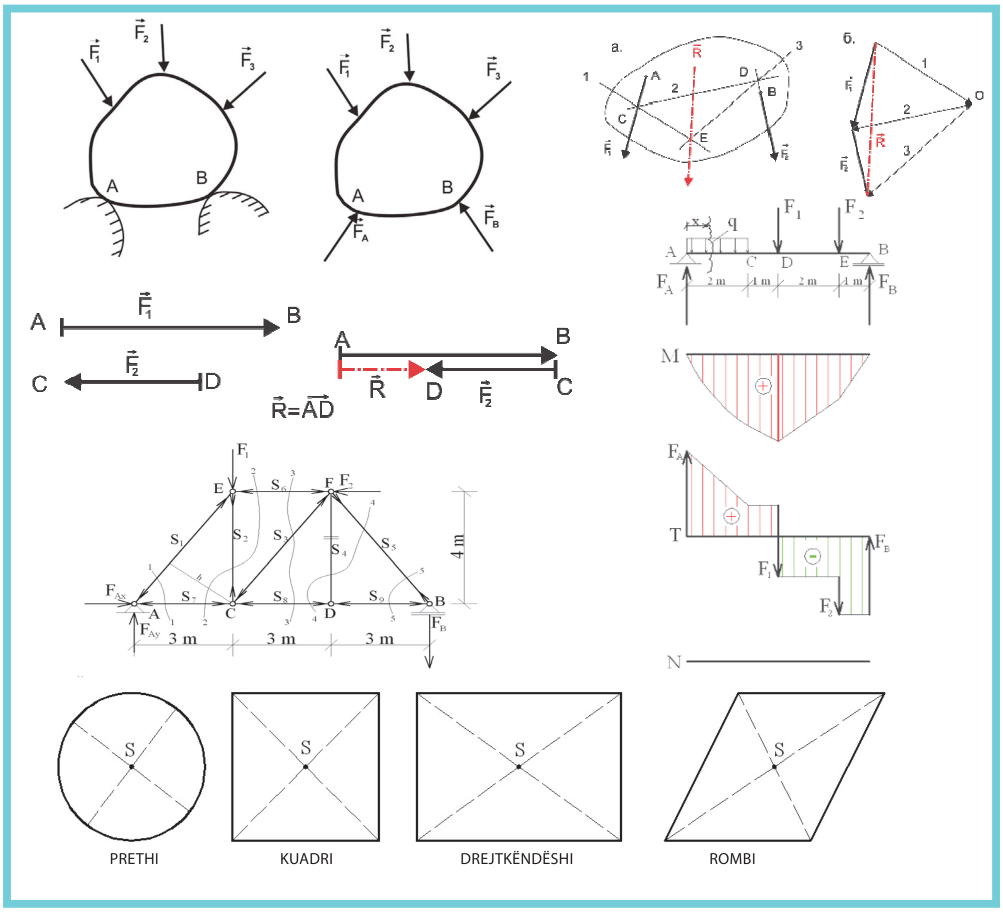
Jela Dugaliq
Urim Mejzini
Bella Duliq



MEKANIKA TEKNIKE
PËR VITIN II

Profesioni ndërtimori-gjeodezi

Teknik i ndërtimtarisë

Autorë:
JELA DUGALIQ, inxh. dipl. i ndërtimtarisë
URIM MEJZINI, inxh. dipl. i ndërtimtarisë
BELLA DULIQ, inxh. dipl. i ndërtimtarisë

Recensentë:
Prof. Dr. Meri Cvetkovska, Fakulteti i Ndërtimtarisë - Shkup
Narasha Hristovska, inxh. dipl. i ndërtimtarisë
Lida trajkovska, inxh. dipl. i ndërtimtarisë

Përkthyes:
Mr. Solidar Sulejmani

Redaktor i botimit në gjuhën shqipe:
Prof. dr. Abdyl Koleci

Lektore: Arjeta Çajlani

Përpunimi i kompjuterëve: Jela Dugaliq dhe Urim Mejzini

Përpunimi teknik: Jela Dugaliq dhe Urim Mejzini

Botuesi: Ministria e arsimit dhe shkencës e Republikës së Maqedonisë

Shtypi: Graficki centar dooel, Shkup

Tirazhi:130

Me Aktvendim për lejimin e librit shkollor nga lënda Mekanika teknike për vitin e dytë, profesioni: ndërtimtari-gjeodezi; profili: teknik i ndërtimtarisë, nr. 22-1260/1, i datës 13.07.2011, i miratuar nga Komisioni nacional për libra shkollorë.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека ”Св.Климент Охридски,, , Скопје
531.8(075.3)

ДУГАЛИЌ, Јела
Техничка механика за II година : градежно геодетска струка : градежен техничар / Јела Дугалиќ, Урим Мејзини, Бела Дулиќ. - Скопје : Министерство за образование и наука на Република Македонија, 2011. - 144стр.: илустр. ; 28 см

ISBN 978-608-226-323-6
1. Мејзини, Урим(автор) 2. Дулиќ, Бела (автор)
COBISS.MK-ID 89144074

PARATHËNIE

Ky libër e përmban materialin nga lënda MEKANIKA TEKNIKE që është paraparë me programin mësimor për arsim të mesëm nga profesioni ndërtimor-gjeodezik, për profilin arsimor Teknik i ndërtimtarisë.

Për përvetësim më të lehtë të kësaj disipline shkencore në çdo tërësi tematike pas shpjegimit detal teorik të materies së parashikuar, janë dhënë shembuj numerik, të zgjidhur në mënyrë analitike dhe grafike. Disa shembuj janë zgjidhur vetëm në mënyrë analitike, në pajtim me programin mësimor.

Nxënësit përvetësimin me sukses të materies së parashikuar mund ta kontrollojnë nëpërmjet detyrave për ushtrim, nëpërmjet pyetjeve për vetëvlerësim dhe testeve të dhëna.

Leksionet teorike janë dhënë në nivel të diturisë së nxënësve të nivelit matematikor për shkolla të mesme. Shembujt numerik janë njehsuar me ndihmën e digitronit me të cilin punojnë nxënësit.

Duke i zgjidhur detyrat sipas dy metodave, siç është paraparë me program - metoda analitike dhe grafike kur rezultatet janë identike, nxënësit ndjejnë kënaqësi.

Fondi i parashikuar i orëve për përvetësim të kësaj materieje është krejtësisht i kënaqshëm.

Autorët

PËRMBAJTJA

Tema 1. Mekanika teknike dhe aksioma në statikë

Tema 2. Statika e pikës materiale

Tema 3. Statika e tokës së ngurtë

Tema 4. Rëndimi

Tema 5. Mbajtësit e plotë të rrafshët

Tema 6. Llojet e mbajtësve

Tema 7. Mbajtësit e rrafshët të parmakëve

HYRJE

Mekanika klasike është disiplinë shkencore e cila i studion llojet më të thjeshta të lëvizjeve dhe qetësimin e materies, respektivisht trupat materiale, si dhe shkaqet e forcave, për shkak të së cilave ndodhin gjendet e tilla. Ato lëvizje dhe materiale mund të mësohen nëpërmjet rrugës së pastër teorike me mjete matematikore. Ajo bën pjesë në mekanikën teorike ose racionale. Me futjen e supozimeve të caktuara mund të thjeshtohet rruga e ndërlikuar matematikore, e me këtë rast rezultatet e përfituara janë në zbatim të kënaqësisë.

Mekanika e cila i zbaton teoremat dhe ligjet e mekanikës racionale, por me këtë rast bën thjeshtime të caktuara të zbatueshme në teknikë, quhet mekanikë teknike, greqisht: *μηχαυιχη τεχνη* lexohet: teknikë mekanike.

Ndarja e mekanikës

Sipas veçorisë së vetë trupave, mekanika teknike ndahet në:

- ***mekanika e trupave të fortë***
- ***mekanika e trupave të lëngët - hidromekanika***
- ***mekanika e trupave të gaztë - aeromekanika***

Mekanika e trupave të fortë, e cila ka zbatim më të madh në teknikë ndahet në:

- ***mekanika e trupave të ngurtë***
- ***mekanika e trupave të ngurtë elastikë, e cila edhe quhet forca e materialeve.***

Mekanika e trupave të ngurtë, e cila formën e trupit e merr si të pandryshuar, jo të deformuar.

Mekanika e trupave të ngurtë pastaj ndahet në: ***statikë, kinetike dhe dinamikë.***

Në statikë mësohen kushtet nën të cilat trupi i materialit, pika e materialit, e goditur nga forcat e jashtme, mbetet në baraspeshë d.m.th. në qetësi. Kjo do të thotë se në statikë punohet vetëm me nocionet ***hapësira*** dhe ***forca.***

Kinematika e studion lëvizjen e trupave materialë ose pikave materiale, duke mos mbajtur llogari për shkaqet të cilat e bëjnë atë lëvizje. Lëvizja vrojtohet në disa kushte të caktuara gjeometrike, varësisht nga kohëzgjatja. Kjo do të thotë se në kinematikë punohet vetëm me nocionet ***hapësirë*** dhe ***kohë.***

Në dinamikë studiohet lëvizja e trupave materialë duke i marrë parasysh edhe shkaqet që i nxisin të dy lëvizjet. Kjo do të thotë se në dinamikë punohet me nocionet: ***hapësira, koha, forca*** dhe ***masa.***

Në shkencën për forcën e materialeve studiohen raportet të cilat ekzistojnë ndërmjet ***forcave, formave*** dhe ***dimensioneve*** të elementeve konstruktive, duke e futur nocionin për llojet e materialeve ***deformacionet*** dhe ***tendosjet***.

Në këtë libër do të njihemi vetëm me pjesën e mekanikës për trupat e ngurtë edhe atë me statikën.

Nocioni për forcat

Forca është shkaku për ndryshimin e qetësisë, respektivisht për lëvizjen e një trupi. E shënojmë me F (**lat. FORTITUDO - forcë**). Në mekanikë forca mund të shkaktojë ***ndryshime*** në lëvizje ose qetësi. Forcat të cilat tentojnë të shkaktojnë lëvizje, i quajmë **forca (aksione)** ***aktive***, kurse forcat të cilat i kundërvihen lëvizjes janë forca ***reaksione*** ose ***pasive***. Dallojmë **forca të jashtme** dhe **forca të brendshme**.

Forcat e jashtme veprojnë në trupin materiale nga jashtë, kurse forcat e brendshme paraqiten në të. Për dallim nga madhësitë ***shkallor****e* të cilat janë caktuar me një numër matës (***gjatësia, koha, temperatura***), forca është ***madhësi vektoriale***, për definimin komplet të së cilës përveç ***vlerës*** **(*intensitetit*)** ***numerik***, nevojitet të dihet ***kahja, drejtimi*** dhe ***pika rënëse***.

Në mënyrë grafike forca paraqitet me drejtëzën e kahëzuar (fig. 1). Gjatësia AB në një shkallë të caktuar paraqet madhësinë (intensitetin) e forcës $\vec{F}$. Pika *A* është pikë rënëse, shigjeta tregon kahjen, kurse drejtimi është shënuar me vijën rënëse *L*.

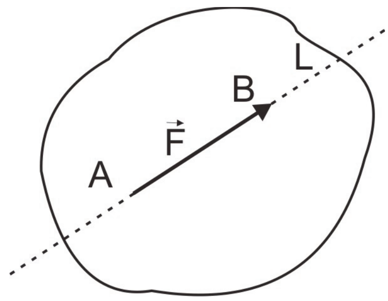


Fig. 1

Forcat e jashtme mund të jenë të **koncentruara** (veprojnë në syprina mjaft të vogla), **sipërfaqësore** (veprojnë nëpër syprinën) dhe **vëllimore** (veprojnë nëpër tërë masën e trupit, për shembull në forcën e gravitetit).

Njësitë matëse

Në Konferencën e përgjithshme të XI për masat dhe peshoret, të mbajtur në vitin 1960 në Paris, është pranuar si sistem ndërkombëtar i masave, i ashtuquajturi sistem *SI* (SYSTEM INTERNATIONAL), i cili është rekomanduar për përdorim në të gjitha fushat e diturisë dhe të teknikës.

Te ne është pranuar si Ligj për njësitë matëse dhe për masat në Gazetën zyrtare të RSFJ nr. 13 të datës 2 prill të vitit 1972. Në atë janë përcaktuar madhësitë kryesore dhe njësitë e tyre matëse, prej të cilave mund të nxirren të gjitha madhësitë e tjera fizike. Prej **madhësive kryesore** në mekanikën teknike (në statikën dhe fortësinë e materialeve) shfrytëzohen vetëm **gjatësia** dhe **masa** (pesha).

Njësia për gjatësi, metri (m) për herë të parë ishte përcaktuar në vitin 1791 si pjesë e dyzetmiliontë e meridianit të Tokës i cili kalon në Paris. Në bazë të matjeve ishte bërë etaloni i metrit, i a.q. "metër i arkivit". Me matjet e mëvonshme më të sakta të gjatësisë së meridianit është treguar se etaloni i metrit nuk është pjesë e dyzetmiliontë e meridianit, prandaj me këtë edhe ky definicion i metrit ishte braktisur.

Njësia për masë (peshë), kilogrami, paraqet masën e prototipit ndërkombëtar për kilogram, të bërë nga legura e platinit dhe iridiumit që është miratuar nga Konferenca e përgjithshme për masa dhe peshore të mbajtur në Paris në vitin 1889 dhe ruhet në Sevër afër Parisit. Ky prototip ka formën e cilindrit me lartësi (39 mm) të barabartë me diametrin. Kjo masë është për 0,28 gramë më e madhe nga masa e 1 dm^3 të ujit të pastër të distiluar në + 4°C, siç ishte definuar në fillim kilogrami. Domethënë, deri sot nuk është gjetur njësi natyrore për masën, por shërbehemi me prototipin e kontraktuar.

Nga njësitë kryesore matëse me ndihmën e shprehjeve algjebrike dhe me përdorimin e simboleve matematikore për shumëzim dhe pjesëtim shfaqen njësitë e aplikuara matëse. Në mekanikën teknike përdoren këto njësi të aplikuara matëse:

***- për syprinën – metër katror, me shenjën* $\mathbf{m^2}$**

***- për vëllimin – metër kub, me shenjën* $\mathbf{m^3}$**

***- për forcën – njutën, me shenjën* N.**

<u>Forca me intensitet 1 N është forca e cila në trup me masë 1 kg i lajmëron nxitim prej 1 m/s^2</u>.

$$1N = 1kg \cdot 1\ m/s^2$$

***- për shtypje – paskali, me shenjën* Pa**

Paskali është shtypje të cilën e shkakton forca prej një njutoni e cila në mënyrë të barabartë është shpërndarë dhe vepron vertikalisht në syprinën prej një metër katror.

$$1Pa = \frac{1N}{1m^2}$$

Për matjen e madhësive, të cilat janë më të mëdha nga njësite e përcaktuara, i përdorim prefikset e përvetësuara ndërkombëtare para shenjave të njësisë matëse.

Emri i prefiksit	Shenja e prefiksit	Koha e prefiksit (me të cilën shumëzohet njësia)	
heksa	E	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
peta	P	1 000 000 000 000 000	10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga	G	1 000 000 000	10^{9}
mega	M	1 000 000	10^{6}
kilo	k	1 000	10^{3}
hekto	h	1 00	10^{2}
deka	da	1 0	10^{1}
deci	d	0,1	10^{-1}
centi	c	0,01	10^{-2}
mili	m	0,001	10^{-3}
mikro	μ	0, 000 001	10^{-6}
nano	η	0, 000 000 001	10^{-9}
piko	p	0,000 000 000 001	10^{-12}
femto	f	0,000 000 000 000 001	10^{-15}
ato	a	0,000 000 000 000 000 001	10^{-18}

Janë parashikuar edhe njësitë matëse d.m.th. **njësitë plotësuese të matjes** të cilat janë jashtë SI, por mund të përdoren:

- për këndin në rrafsh (α, β,γ,δ.....) - **radiani** (rad).

Radiani është këndi në rrafsh midis dy rrezeve të cilat në vijën rrethore e presin lakoren me gjatësi të barabartë me rrezen.

Këndi i plotë = 2π *rad*

Përveç radianit mund të shfrytëzohet edhe:

- një gradë $1^{\circ} = \frac{\pi}{180} rad = 60'$ (minuta)
- minuta $(')$ = $\frac{\pi}{10800} rad = 60''$ (sekonda)
- sekonda $('')$ = $\frac{\pi}{648000} rad$

$1\ rad = 57^{\circ}\ 17'\ 44{,}8''$

$1^{\circ} = 0{,}0175\ rad$

- për gradë celsius të temperaturës

$1°\ C = 1K$

Sipas madhësisë gradë celsius është e barabartë me gradë kelvin. Temperatura prej 0°C është e barabartë me temperaturën prej 273,16 K. Është i ndaluar përdorimi i ferenhajtit, rakinit dhe reomirit.

Në mekanikën teknike si shenja shpesh përdoren shkronjat greke, për ç'arsye është dhënë tërësisht alfabeti grek.

ALFABETI GREK

Α α	Alfa	**Ι ι**	Jota	**Ρ ρ**	Ro
Β β	Beta	**Κ κ**	Kapa	**Σ σ**	Sigma
Γ γ	Gama	**Λ λ**	Lambda	**Τ τ**	Tau
Δ δ	Delta	**Μ μ**	Mi	**Υ υ**	Ypsilon
Ε ε	Epsilon	**Ν ν**	Ni	**Φ φ**	Fi
Ζ ζ	Zeta	**Ξ ξ**	Ksi	**Χ χ**	Hi
Η η	Eta	**Ο ο**	Omikron	**Ψ ψ**	Psi
Θ θ	Teta	**Π π**	Pi	**Ω ω**	Omega

1. STATIKA

Emri statikë rrjedh nga fjala greke **στατιχη**, që do të thotë ***qëndrim*** respektivisht ***qetësim*** (lexohet: statika).

Statika është pjesë e mekanikës teknike e cila i studion kushtet nën të cilat pika materiale ose trupi material nën ndikimin e forcave të jashtme mbetet në baraspeshë, respektivisht në qetësi. Kjo është detyrë kryesore e statikës. Të përkujtohemi në dituritë nga fizika se ajo është vetëm qetësi relative, sepse qetësia absolute në natyrë nuk ekziston.

Termin **trupi material**, si pjesë e kufizuar e materies ndaj të cilës vrojtohen ndryshimet, tashmë e hasim në pjesën hyrëse.

Trupi me dimensione të vogla në raport me trajektoren e mundshme të lëvizjes, quhet **pikë materiale**. Pika e tillë nuk ka vëllim, as edhe formë, por vetëm masë.

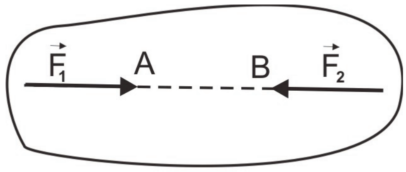
Forcat në natyrë e definojnë trupin ndaj të cilit veprojnë, respektivisht e zvogëlojnë formën dhe vëllimin e tij. Kjo do të thotë se trupat e ngurtë janë deformabilë. Por, në statikën lëndë e studimit është trupi i fortë ideal i a.q. trup i ngurtë, i cili nuk deformohet.

Detyra e dytë kryesore e statikës është sistemi i dhënë i forcave që ta sjellë në sistemin më të thjeshtë dhe ta zëvendësojë me sistemin ekuivalent të forcave. Kur në pikën ose trupin e skajshëm njëkohësisht veprojnë shumë forca i a.q. sistem i forcave të cilat nuk janë në baraspeshë, veprimi i tyre mund të zëvendësohet me një forcë e cila është ekuivalente me atë sistem të forcave. Kjo forcë quhet **rezultante**. Forcat e veçanta të cilat e japin këtë rezultante, quhen **komponentë**. Ky është parimi i **ekuivalencës**.

Aksiomat e statikës

Si çdo shkencë, edhe statika bazohet në parime (zakone) të caktuara, të cilat kanë karakter të aksiomave. Tek ato është arritur me vrojtim të dukurive natyrore. Janë kontrolluar në praktikë dhe shërbejnë si bazë për studim të mëtejshëm të problemeve statike.

Aksioma e parë. *Nëse në trupin e ngurtë të lirë veprojnë dy forca, ato do të jenë në baraspeshë, kurse trupi në qetësi, vetëm atëherë kur ato forca do të kenë: madhësia të barabartë, kahje të kundërt dhe drejtim të njëjtë* (fig. 2).



$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Fig. 2

Aksioma e dytë. *Veprimi i dy forcave, të cilat e goditin trupin e ngurtë në pikën e njëjtë rënëse, por janë me drejtime të ndryshme, mund të zëvendësohet në mënyrë ekuivalente me forcë të tretë të a.q. rezultante R. Madhësia dhe drejtimi i asaj rezultante është caktuar me diagonalen e paralelogramit të konstruktuar në forcat* $\vec{F1}$ *dhe* $\vec{F2}$ *si brinjë, kurse kahja shkon në pikën rënëse kah kulmi i kundërt i paralelogramit.* (fig. 3). **Kjo aksiomë është e njohur si rregulla e paralelogramit të forcave.**

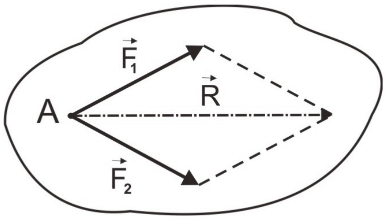


Fig. 3

Aksioma e tretë. *Pika rënëse e forcës që vepron në një trup të ngurtë lirisht mund të zhvendoset në gjatësinë e vijës së vet rënëse, pavarësisht trupi a është në qetësi ose në lëvizje* (fig. 4).

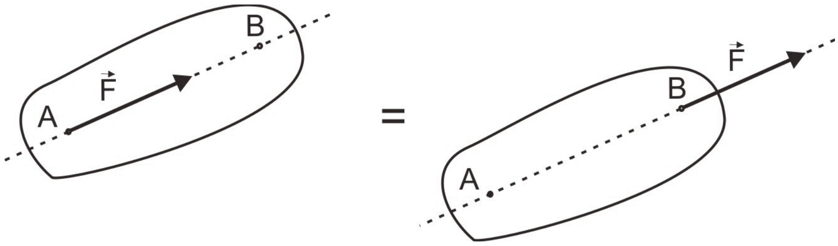


Fig. 4

Aksioma e katërt. *Dy trupa veprojnë njëri ndaj tjetrit me forca të cilat kanë madhësi dhe drejtim të njëjtë, por janë me kahje të kundërt. Aksioni është i njëjtë dhe i kundërt me reaksionin. (*fig. 5). **Kjo aksiomë është e njohur si ligj i aksionit dhe reaksionit.**

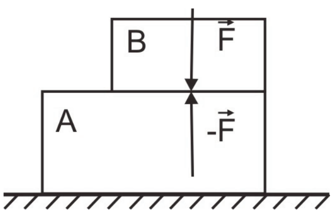


Fig. 5

Aksioma e pestë. *Çdo trup i lidhur (jo i lirë) i ngurtë mund të vrojtohet si ilirë, nëse lidhjet e përhershme të cilat e kufizojnë lëvizjen e tij të lirë zëvendësohen me forca të cilat quhen reaksione. (*fig. 6).

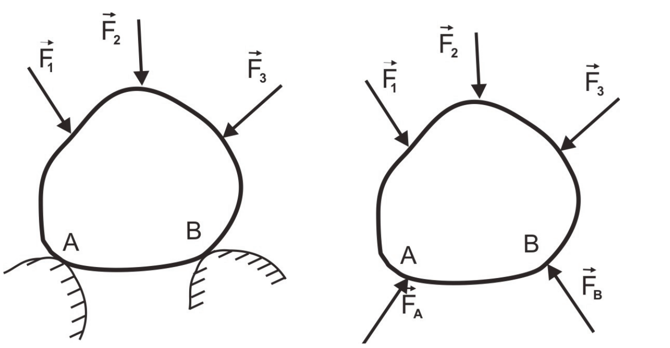


Fig. 6

Gjatë zgjidhjes së problemeve statike këto reaksione ose forca relative shpesh paraqiten si të panjohura me madhësinë, drejtimin dhe kahjen e tyre, por me pikë të njohur rënëse.

Aksioma e gjashtë. *Veprimi i sistemit të dhënë nga forcat ndaj ndonjë trupi të ngurtë nuk do të jetë zëvendësuar nëse në këtë sistem të forcave shtojmë ose heqim ndonjë sistem tjetër të forcave që gjendet në baraspeshë* (fig. 7).

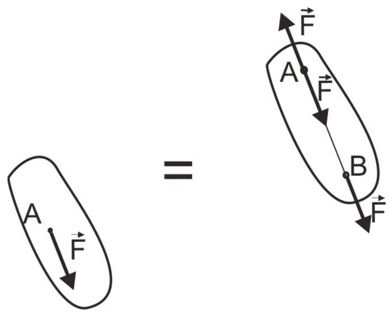


Fig. 7

Ndarja e metodave në punën e statikës

Sipas renditjes së forcave në hapësirë, statika ndahet në statikë në **hapësirë** (fig. 8) dhe në statikë në **rrafsh** (fig. 9). Ne do të njihemi vetëm me statikën në rrafsh. Kjo do të thotë se të gjitha forcat, të cilat veprojnë në pikën materiale ose në trupin material, veprojnë në një rrafsh.

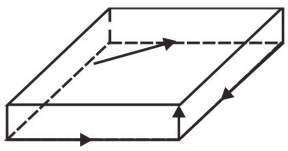


Fig. 8

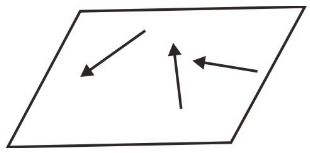


Fig. 9

Të gjitha detyrat në statikë mund t'i zgjidhim sipas metodës **analitike** dhe **grafike**. Sipas metodës analitike madhësitë e panjohura statike i caktojmë me ndihmën e operacioneve matematikore. Sipas metodës grafike madhësitë e panjohura statike i caktojmë me ndihmën e vizatimit (grafostatikës). Në metodën analitike rezultatet janë të sakta, kurse në metodën grafike paraqiten mjaft gabime, varësisht nga shkalla e cila zbatohet gjatë zgjidhjes së detyrave.

Sipas mënyrës së metodës analitike mund të bëhet kontrolli i detyrës së zgjidhur me metodën grafike dhe e kundërta. Në praktikë në raste të caktuara që të kontrollohen rezultatet e fituara, mund të përdoren edhe të dy metodat.

2. STATIKA E PIKËS MATERIALE

Me nocionin **pika materiale**, si trup me dimensione mjaft të vogla në raport me trajektoren e vet që nuk ka vëllim as dhe formë, por vetëm masë, tashmë takohemi në pjesën hyrëse. Në pikën e tillë mund të veprojnë një ose më tepër forca. Nëse vepron vetëm një forcë, ajo pikë do të lëvizë në drejtim dhe në kahje të forcës. Kur nga ana tjetër në atë veprojnë shumë forca, ajo mund të lëvizë në drejtim dhe kahje të rezultantes nga ato forca, por mund të mbetet edhe në qetësi, në rastin kur forcat janë në baraspeshë.

2.1 MBIVENDOSJA E FORCAVE QË VEPROJNË NË PIKËN MATERIALE NË DREJTIM TË NJËJTË

Forcat të cilat veprojnë nëpër gjatësinë e një vije, i quajmë forca jolineare. Së pari do të vrojtojmë rastin kur në pikën materiale M veprojnë dy forca F_1 dhe F_2 në drejtim të njëjtë dhe në kahje të njëjtë (fig. 10).

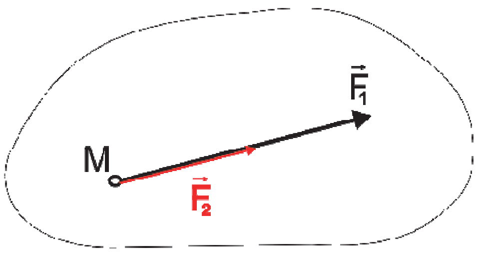


Fig. 10

Veprimi i tyre i përbashkët mund të zëvendësohet me forcë tjetër e cila paraqet rezultanten. Kjo rezultante mund të caktohet në mënyrë analitike dhe grafike. Në mënyrë analitike, rezultantja caktohet me barazimin (1):

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \qquad (1)$$

Në mënyrë grafike rezultantja caktohet me paraqitje grafike të forcave në shkallë më të madhe dhe mbledhjen e tyre në drejtëz të njëjtë (fig. 11).

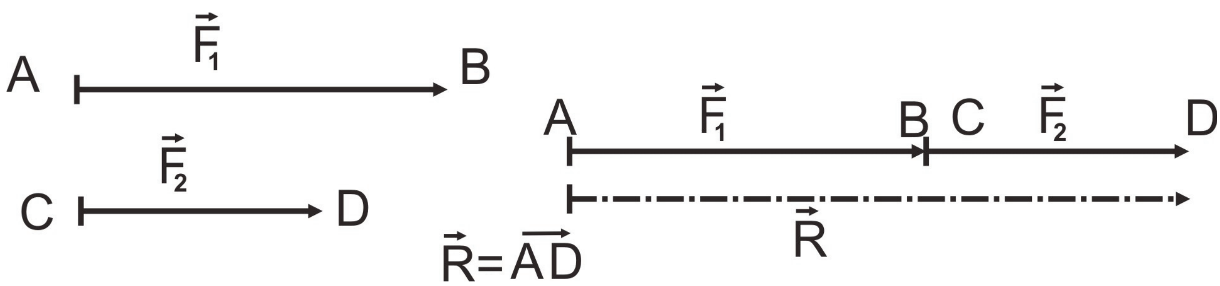


Fig. 11

Ky parim vlen edhe kur kemi numër arbitrar të forcave të cilat veprojnë në një pikë nëpër gjatësinë e drejtëzës së njëjtë dhe kemi drejtim të njëjtë.

Shprehja analitike për rezultanten në këtë rast është dhënë barazimi (2a):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots . \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (2a)$$

Për shkak të kolinearitetit të forcave $\vec{F}_i$ (veprojnë nëpër gjatësinë e drejtëzës së njëjtë) shuma vektoriale nga barazimi (2a) mund të zëvendësohet me intensitetin shkallor, respektivisht me intensitetin e rezultantes fitrohet si shumë algjebrike nga intensiteti i forcave të caktuara nga barazimi (2b).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots . \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (2a)$$

Simboli $\sum$ (sigma) paraqet shenjën më shumë.

Barazimi (2) me fjalë lexohet:

Intensiteti i rezultantes së forcave të cilat sulmojnë pikën materiale nëpër gjatësinë e drejtëzës së njëjtë dhe në kahje të njëjtë, është i barabartë me shumën aritmetike të intensitetit të forcave të dhëna. Rezultantja e ka kahjen e tyre.

Kur në pikën materiale *M* veprojnë dy forca $\vec{F}_1$ *dhe* $\vec{F}_2$ në drejtim të njëjtë, por në kahje të kundërt (fig. 12), rezultantja e tyre është e barabartë me ndryshimin e tyre dhe ka kahje të forcës më të madhe.

$F_1 < F_2$ atëherë do të jetë: $R = F_1 + F_2$

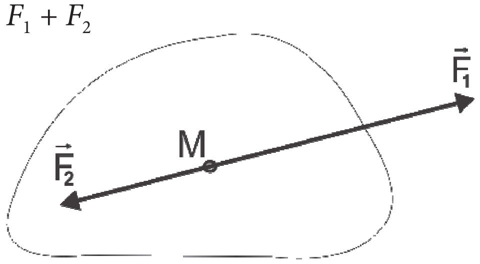


Fig. 12

Kjo rezultante gjithashtu mund të caktohet edhe grafikisht. Në shkallë më të madhe i paraqesim forcat $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ dhe ndryshimin i tyre e jep rezultanten (fig. 13).

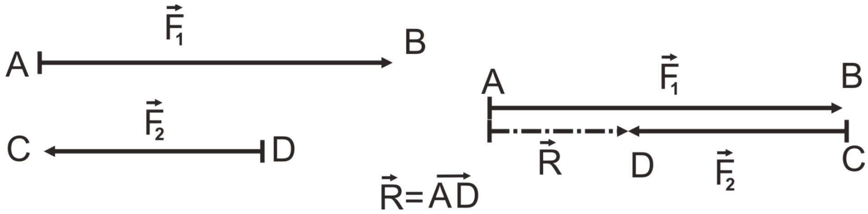


Fig. 13

Ky parim ka të bëjë edhe me numrin arbitrar të forcave të cilat veprojnë në pikën materiale nëpër gjatësinë e drejtëzës së njëjtë, por në drejtime të kundërta.

Shprehja analitike e rezultantes është dhënë në barazimin (3):

$$R = \pm F_1 \pm F_2 \pm ....\pm F_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_i \qquad (3)$$

Intensiteti i rezultantes në sistem të forcave të cilat e sulmojnë pikën materiale, kurse janë me drejtim të njëjtë, por me kahje të ndryshme, është i barabartë me shumën algjebrike të intensiteteve të forcave të caktuara.

Kur kjo shumë algjebrike është e barabartë me zero, pika materiale është në qetësi. Ky kusht për baraspeshë të forcave shprehet me barazimin (4):

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0 \qquad (4)$$

Procedura gjatë caktimit të rezultantes së forcave quhet edhe mbivendosje e forcave.

Ngase forcat janë madhësi vektoriale, për mbledhjen e tyre vlen ligji komutativ dhe asociativ. Sipas ligjit komutativ shuma vektoriale e dy vektorëve nuk varet nga rendi i mbledhjes d.m.th. $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{F_2} + \vec{F_1}$, kurse nga ligji asociativ del se shuma vektoriale nuk ndryshon, nëse mbledhësit i grupojmë në mënyrë të paramenduar.

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{F_1} + (\vec{F_2} + \vec{F_3}) = (\vec{F_1} + \vec{F_2}) + \vec{F_3}$$

Njohjen e deritashme teorike me statikën e pikës materiale duhet ta kontrollojmë nëpërmjet shembujve numerikë.

SHEMBUJ TË ZGJIDHUR

Shembulli 1. *Në mënyrë grafike dhe analitike të caktohet rezultantja e forcave* F_1 = 6kN, F_2 = 8kN dhe F_3 = 3kN, *nëse ato veprojnë në pikën materiale sipas vijës së njëjtë rënëse dhe kanë drejtim të njëjtë.*

Zgjidhje:

Analitike: Në bazë të barazimit (2c) fitohet:

$$R = \sum_{i=1}^{3} F_i = F_1 + F_2 + F_3 = 6 + 8 + 3 = 17kN$$

Shihet mbivendosja e rezultanteve të fituara sipas metodës grafike dhe analitike.

Grafikisht: (shkalla: 1cm = 2kN, lexohet: një centimetër përgjigjet ndy kilonjutna) nga fig. 14, fitohet: *R* = 8,5 x 2 = 17 *kN*

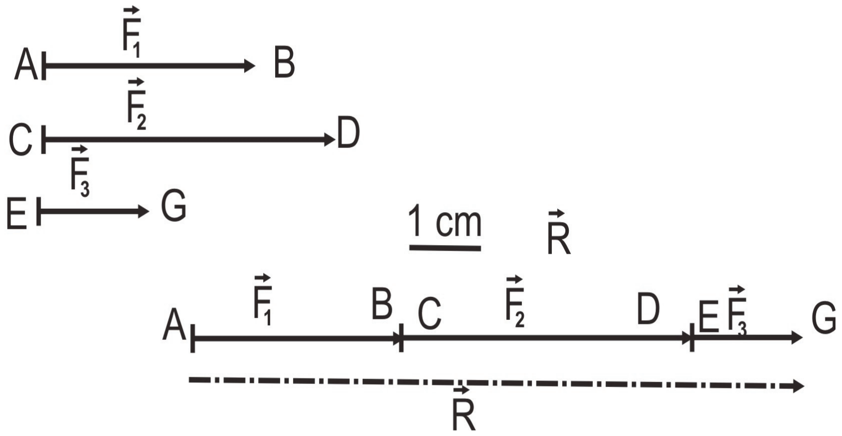


Fig. 14

Shembulli 2: *Në mënyrë grafike dhe analitike të caktohet rezultantja e forcave* F_1 = 3,8 N; F_2 = 4,2 N; F_3 = - 5,1N dhe F_4 = 2,4N, *nëse ato veprojnë në pikën materiale në drejtim të njëjtë, por forca* F_3 *është në kahje të kundërt* (fig. 15).

Zgjidhje:

Grafikisht: (shkalla: 1cm = 1N) Nga fig. 15 fitohet:

R = 5,3 x 1 = 5,3 N

Rezultantja R është e barabartë me gjatësinë e pikës rënëse të drejtëzës së forcës *M,* deri në fund të forcës së fundit, d.m.th. pikës *A.* Kjo rregull është e vlefshme.

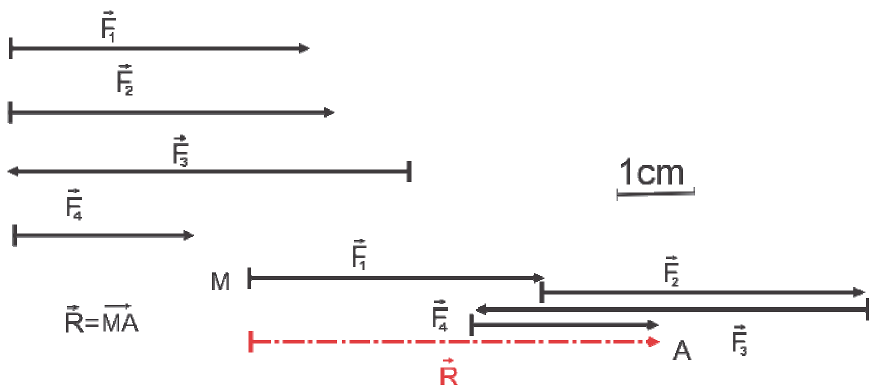


Fig. 15

Analitike: Në bazë të barazimit (2) fitohet:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 3{,}8 + 4{,}2\text{-}5{,}1 + 2{,}4 = 5{,}3N$$

Shembulli 3. Është dhënë rezultantja $\vec{R}$ në tri forca $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ dhe $\vec{F}_3$ të cilat veprojnë nënpikën materiale në drejtim të njëjtë. Duhet të caktohet forca $F_{2,}$ nëse është: $R = 120$ kN; $F_1 = 70$kN; $F_3 = 90$ kN; F_2 =?

Zgjidhje:

Grafikisht: (shkalla: 1 cm = 20 kN). Nga fig. 16 fitohet:

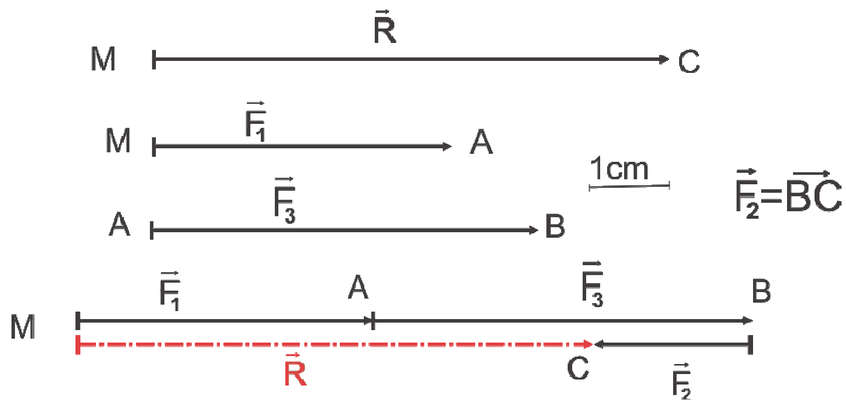


Fig. 16

$$\left|\vec{F}_2\right| = -2 \times 20 = -40kN$$

Analitike:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 \ ; \qquad F_2 = R - F_1 - F_3$$
$$F_2 = 120 - 70 - 90 = -40kN$$

Shembulli 4. *Është dhënë rezultantja* $\vec{R}$ *e katër forcave* $\vec{F}_1$; $\vec{F}_2$; $\vec{F}_3$ dhe $\vec{F}_4$ *të cilat veprojnë në pikën materiale në drejtim të njëjtë. Duhet të caktohet forca* $\vec{F}_4$, nëse është: $R = 1250$kN;
F_1 = -750kN; F_2 = - 500 kN; F_3 = 600kN; F_4 =?

Zgjidhje:

Grafikisht: (shkalla: 1 cm = 200 kN). Nga fig. 17 shihet se është:
$F_4 = 9{,}5 \ X \ 200 = 1900kN$

Analitike:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \ ; \quad F_4 = R - F_1 - F_2 - F_3$$
$$F_4 = 1250 - (-750) - (-500) - 600 = 1900kN$$

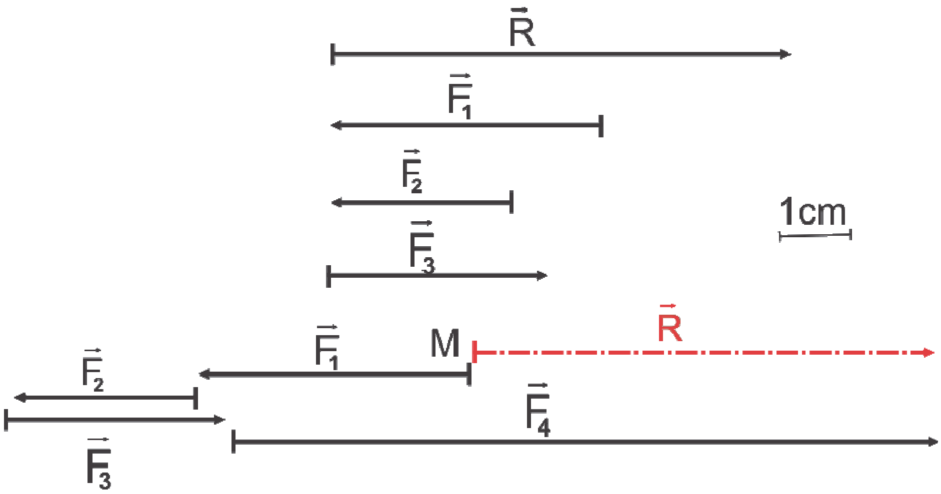


Fig. 17

Shembulli 5. *Në mënyrë grafike dhe analitike të caktohet forca $\vec{F}_5$ ashtu që pika materiale* M *të jetë në baraspeshë, nëse është dhënë*

F_1 = 35 kN, F_2 = - 20 kN, F_3 = 50 kN, F_5 = - 40 kN, F_5 =?

Zgjidhje:

Kusht për baraspeshën e pikës materiale është $R = |\vec{R}| = 0$

Grafikisht: (shkalla: 1 cm = 10 kN) Nga fig. 18 shihet se është:

F_5 = -2,5x10 = *-25kN*

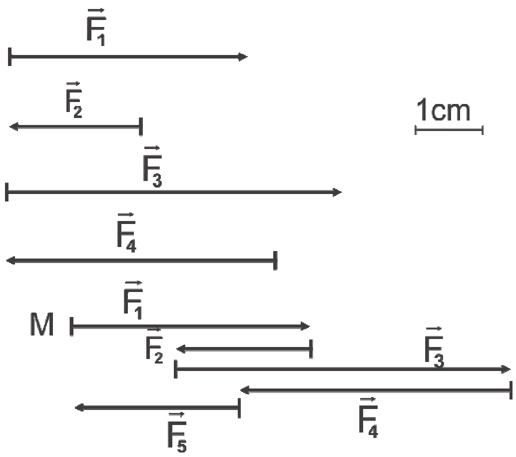


Fig. 18

Analitike:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$$
$$F_5 = -F_1 - F_2 - F_3 - F_4$$
$$F_5 = -35 - (-20) - 50 - (-40)$$
$$F_5 = -25kN$$

DETYRA PËR USHTRIM

Shembulli 6. *Është dhënë rezultantja R e katër forcave* $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ dhe $\vec{F}_4$ *të cilat veprojnë në pikën materiale në drejtim të njëjtë. Duhet të caktohet forca* $\vec{F}_3$, nëse është: $R = 3{,}8$ N; $F_1 = -4{,}9$ N; $F_2 = 5{,}2$ N; $F_3 = ?$; $F_4 = -6{,}1$ N.

Zgjidhje: $F_3 = 9{,}6\ N$

Shembulli 7. *Në mënyrë grafike dhe analitike të caktohet forca* $\vec{F}_1$ *ashtu që pika materiale të jetë në baraspeshë, nëse janë dhënë forcat* $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, *dhe* $\vec{F}_4$ *me drejtim të njëjtë, por me kahje të kundërt*. $F_2 = 6580$ N, $F_3 = -4800$ N, $F_4 = 3200$ N.

Zgjidhje: $F_1 = -4980N$

2.2 MBIVENDOSJA DHE ZBËRTHIMI I FORCAVE QË VEPROJNË NË PIKËN MATERIALE NË DREJTIME TË NDRYSHME

Kur në pikën materiale M veprojnë dy forca $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ në drejtime të ndryshme (fig. 19), ajo pikë do të lëvizë në drejtim të rezultantes $\vec{R}$, e cila grafikisht mund të caktohet sipas **metodës së paralelogramit**. Kjo del nga aksioma e dytë e statikës.

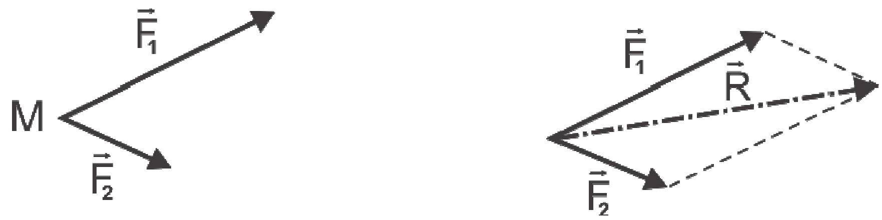


Fig. 19

Te rezultati i njëjtë vihet nëse në pikën e fundit $\vec{F}_1$ e zvogëlojmë forcën $\vec{F}_2$, duke mbajtur llogari për drejtimet dhe kahjet e tyre. Rezultantja $\vec{R}$ është vektor i cili i lidh fillimin e forcës $\vec{F}_1$ dhe fundin e forcës $\vec{F}_2$ (fig. 20). Kjo **metodë e trekëndëshit** të forcave ka zbatim të madh gjatë përcaktimit fizik të rezultantes së numrit orbitrar të forcave të cilat veprojnë në një pikë materiale në rrafsh të njëjtë. Rezultantja fitohet me mbledhje gjeometrike të forcave.

Fig. 20

Analitikisht, rezultantja e të dy forcave të cilat veprojnë në një pikë materiale me drejtime të ndryshme mund të caktohet me ndihmën e teoremës së kosinusit (fig. 21).

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180 - \alpha)$$
$$\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha$$
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$$

Rast special është nëse dy forca janë normale njëra ndaj tjetrës (fig. 22). Në këtë rast rezultantja fitohet me zbatimin e teoremës së Pitagorës, por e njëjta del nga teorema e kosinusit, nëse është $\alpha = 90°$. $R^2 = F_1^2 + F_2^2; \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

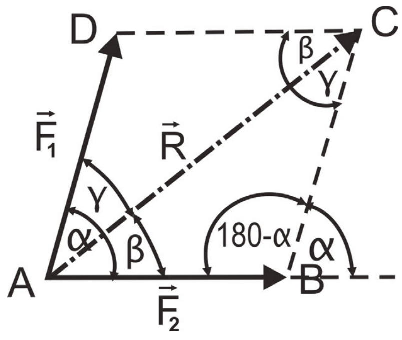


Fig. 21

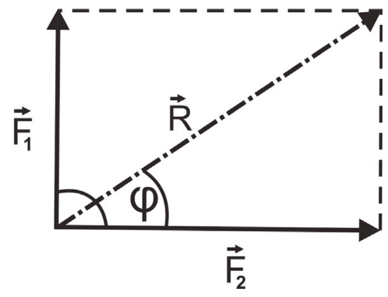


Fig. 22

nga $\Delta ABC \Rightarrow R = \overline{AC} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

Pozita e rezultantes (fig. 21) mund të caktohet me zbatimin e rregullës së sinusit:

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(180-\alpha)}; \quad \frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha};$$

$$\sin\beta = \frac{F_2}{R}\sin\alpha; \qquad \sin\gamma = \frac{F_1}{R}\sin\alpha; \qquad (6)$$

Analitikisht rezultantja caktohet edhe sipas **metodës së projeksioneve**. Projeksioni i një force të të dy boshteve midis vete normale (sistemi koordinativ i Dekarit) fitohet me tërheqjen e normaleve në boshtet nga pika fillestare dhe e fundit e forcës. Projeksioni ortogonal i forcës $\vec{F}$ të x-boshtit është F_x, kurse të y-boshtit është F_y (fig. 23). Projeksionet e forcave në bosht janë madhësi shkallore, kurse vlerat e këtyre projeksioneve janë dhënë në barazimet (7).

$$F_x = F \cdot \cos\alpha$$
$$F_y = F \cdot \sin\alpha \qquad (7)$$

Kur kemi dy forca në një rrafsh, të cilat veprojnë në një pikë materiale, lehtë mund të tregohet se projeksioni nga rezultantja $\vec{R}$ e atyre forcave është i barabartë me shumën algjebrike të projeksioneve të forcave që e japin atë rezultante në raport me bishtin e njëjtë. Në (fig. 24) është treguar projeksioni i forcave $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ midis dy boshteve normale midis tyre.

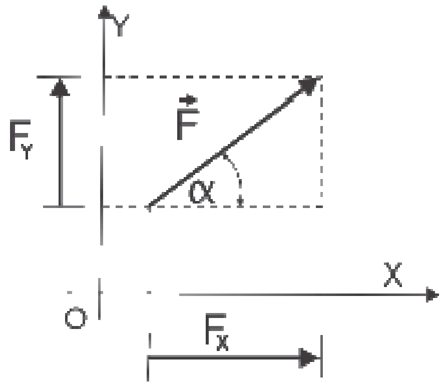


Fig. 23

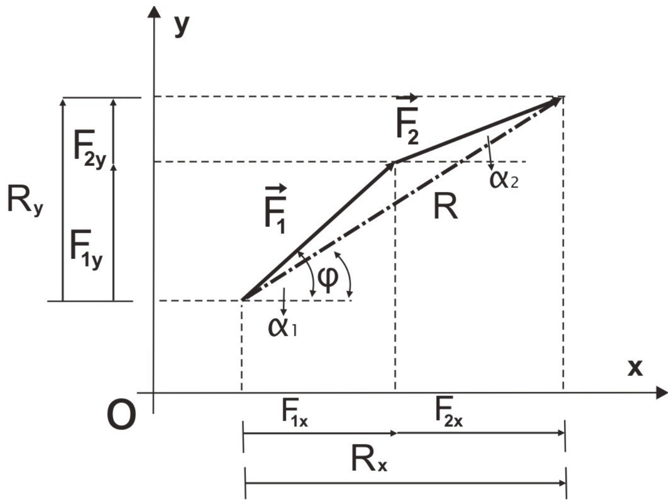


Fig. 24

Tash problemi është sjellë në caktimin e rezultantes së forcave (projeksioneve) me vijë të njëjtë rënëse. Projeksioni i forcës së parë $\vec{F_1}$ të **x**-boshtit është F_{1x}, nga forca $\vec{F_2}$ e $F_{2x,}$ kurse projeksioni i rezultantes së saj është R_x. Në bazë të barazimit (7) fitohet:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1; \quad F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2;$$

Në bazë të barazimit (2) dhe fig. 24 kemi:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x}$$

Projeksionet e forcave të y-boshtit janë: F_{1y}, F_{2y}, kurse të rezultanteve të tyre është R_y. Sipas analogjisë fitojmë:

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1; \quad F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2;$$

Respektivisht:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y}$$

Nga këta dy komponentë të rezultanteve në bazë të teoremës së Pitagorës e fitojmë madhësinë e rezultantes (8):

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad (8)$$

Këndi φ (fig. 22) që e përputh rezultanten R me pjesën pozitive të **x**-boshtit është përcaktuar me raportet (9):

$$tg\varphi = \frac{R_y}{R_x}; \qquad \cos\varphi = \frac{R_x}{R}; \quad \sin\varphi = \frac{R_y}{R} \tag{9}$$

Zbërthimi i forcës në dy komponentë, drejtimet e të cilëve janë dhënë, paraqet zbatimin e kundërt të ligjit të paralelogrameve, respektivisht trekëndëshin e forcave. Forcën $\vec{F}$ duhet ta zbërthejmë në dy komponentë me drejtime të dhëna I — I dhe II —II (fig. 25). Vetë forca F zvogëlohet në planin e forcave në shkallë të caktuar.

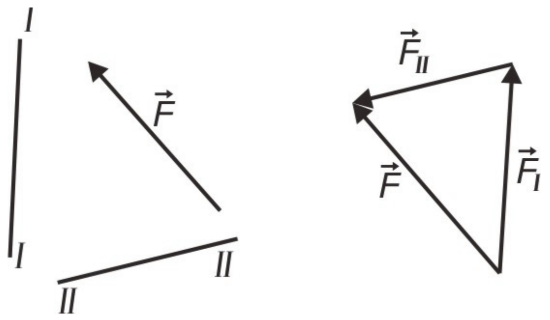


Fig. 25

Nëpër pikat e skajshme të forcës $\vec{F}$ tërheqim paralele me drejtimet e dhëna dhe i fitojmë madhësitë e komponentëve të kërkuar $\vec{F}_I$ dhe $\vec{F}_{II}$. Kahjet e komponentëve caktohen ashtu që rezultantja e tyre duhet të paraqesë forcën e dhënë $\vec{F}$.

Kur në një pikë materiale vepron sistem i shumë forcave në drejtime të ndryshme, rezultantja e tyre caktohet sipas **metodës grafike** dhe **analitike**.

Gjatë caktimit grafik të rezultantes të sistemit të forcave, e vizatojmë **planin e forcave**. Në shkallë më të madhe i futim forcat sipas rendit, duke mbajtur llogari për drejtimet dhe kahjet e tyre (fig. 26). Me lidhjen e fillimit të forcës së parë dhe fundit të forcës së fundit e fitojmë rezultanten e atij sistemi të forcave. Në rastin kur këto dy pika d.m.th. fillimi i forcës së parë dhe fundi i forcës së fundit përputhen, do të thotë se rezultantja është e barabartë me zero dhe pika materiale është në baraspeshë. Në këtë rast plani i forcave është mbyllur. Kahjet e forcave ndërlidhen njëri me tjetrin d.m.th. **ndiqen**. Ky është **kushti grafik për baraspeshë**.

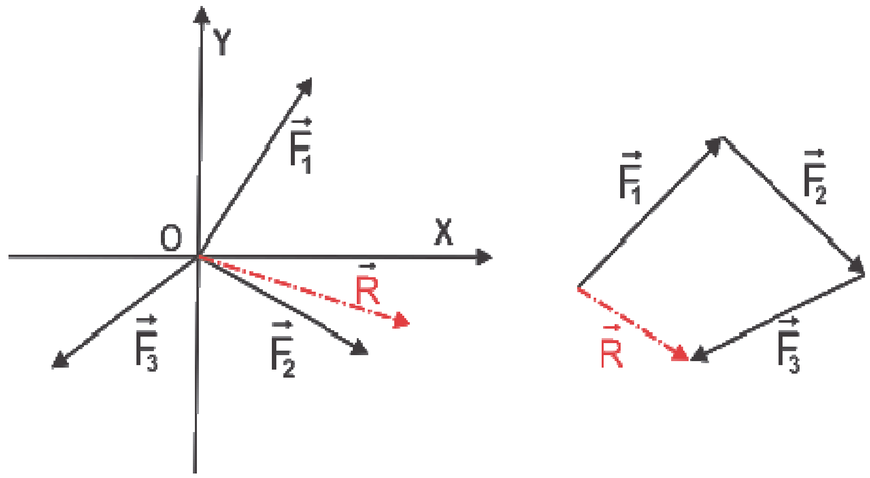


Fig. 26

Sistemi i forcave të cilat veprojnë në pikën materiale në drejtime të paramenduara në një rrafsh është në baraspeshë nëse të gjitha forcat e jashtme të ndërlidhura njëra me tjetrën e përbëjnë planin e mbyllur të forcave.

Shprehjet matematikore të komponentëve të rezultanteve janë dhënë me barazimet (10);

$$R_x = \sum_{i=1}^{i=n} F_{ix}; \qquad R_y = \sum_{i=1}^{i=n} F_{iy}; \tag{10}$$

Sistemi i forcave $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$......$\vec{F}_n$, me drejtime dhe kahje të paramenduar, të cilat sulmojnë një pikë, do të jenë në baraspeshë nëse rezultantja e tyre, respektivisht të dy komponentët e rezultantes janë të barabartë me zero.

$$R_x = \sum_{i=1}^{i=n} F_{ix} = 0; \qquad R_y = \sum_{i=1}^{i=n} F_{iy} = 0; \tag{11}$$

Në praktikë hasim me këto barazime me formë të shkurtë (12):

$$\sum X = 0 \quad ; \quad \sum Y = 0 \tag{12}$$

Kur në një pikë materiale veprojnë shumë forca, shuma e të gjitha projeksioneve vertikale dhe horizontale duhet të jetë e barabartë me zero që ajo pikë të jetë në baraspeshë.

Barazimet (12) **janë kushte kryesore analitike për baraspeshë të sistemit të forcave në rrafsh të cilat sulmojnë pikën materiale.**

Metoda analitike është më e saktë se sa metoda grafike (ku paraqiten gabime të vogla gjatë të vizatuarit), por të dy metodat në mënyrë reciproke kontrollohen. Gjatë zgjidhjes së detyrave në statikë, e posaçërisht gjatë kontrollimit të baraspeshës së trupave të ndërlidhur, shpesh hasim raste kur në një trup veprojnë tri forca me drejtime të paramenduara në rrafsh të njëjtë. Gjatë zgjidhjes së detyrave të tilla e shfrytëzojmë rregullën për baraspeshë të të tri forcave, e cila thotë: **Një trupi i lirë i ngurtë në të cilin veprojnë tri forca me drejtime të para-**

menduara në një rrafsh është në baraspeshë kur vijat rënëse të atyre forcave priten në një pikë dhe forcat shfaqin trekëndësh të mbyllur të forcave.

Procedura gjatë zgjidhjes së detyrave të tilla fillon me lirimin e lidhjeve dhe zëvendësimin e tyre me reaksione të panjohura, në pajtim me aksiomën e pestë të statikës, me çka fitohet diagram i trupit të lirë material. Në këtë kapitull si lidhje do të jenë përmendur vetëm shkopinjtë të cilët përcjellin forca (reaksione) vetëm nëpër gjatësinë e boshtit të vet. Në shembujt (12) dhe (13) detalisht është paraqitur e tërë procedura.

Në disa shembuj karakteristikë janë treguar metodat e mbivendosjes dhe zbërthimit të forcave në rrafsh të cilat i takojnë pikës materiale në drejtime të paramenduara.

Shembuj të zgjidhur

Shembulli 8. *Në mënyrë grafike dhe analitike të caktohet rezultantja e forcave $\vec{F_1}$ dhe $\vec{F_2}$ të cilat midis veti përputhen me këndin α (fig. 27),*
Nëse janë dhënë:

F_1 = 6, 8kN; F_2 = 9,2kN; α = 53°

Zgjidhje:
Grafikisht:
(shkalla: 1*cm* = 2*kN*) Nga fig. 28 shihet se është:

$$R = 7,2 \times 2 = 14,4kN$$
$$\varphi = 31^\circ$$

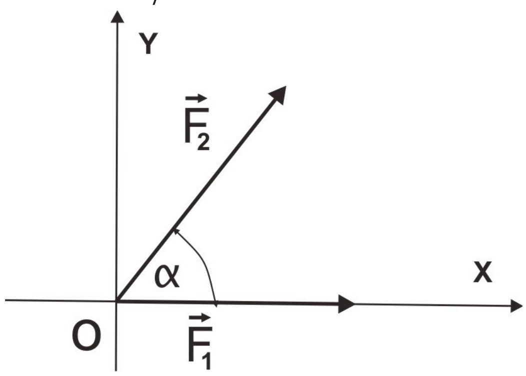


Fig. 27

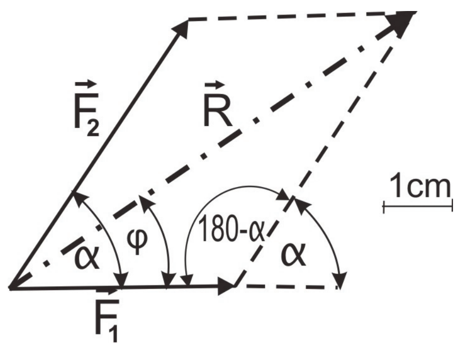


Fig. 28

Analitike:

Sipas barazimit (5) do të jetë:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha$$
$$R^2 = 6,8^2 + 9,2^2 + 2 \cdot 6,8 \cdot 9,2 \cos 53° = 46,24 + 84,64 + 2 \times 6,8 \times 9,2 \cdot 0,6018$$
$$R^2 = 206,179; \qquad R = \sqrt{206,179} = 14,3589kN$$
$$\sin\varphi = \frac{F_2}{R}\sin(180 - \alpha) = \frac{9,2}{14,3589}\sin(180 - 53°) = 0,5117$$
$$\varphi = 30^\circ 46' 37''$$

Kontrolli:

Sipas barazimit (8) do të jetë:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 6,8 \cdot \cos 0° = 6,8 \cdot 1 = 6,8kN$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 9,2 \cdot \cos 53° = 9,2 \times 0,6018 = 5,536698kN$$
$$F_{2y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 6,8 \cdot 0 = 0$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 9,2 \cdot \sin 53° = 9,2 \times 0,7986 = 7,34745kN$$
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 6,8 + 5,536698 = 12,3367kN$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 + 7,34745 = 7,34745kN$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{12,3367^1 + 7,34745^2} = \sqrt{206,179} = 14,3589kN$$
$$tg\varphi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{7,34745}{12,3367} = 0,59557; \qquad \varphi = 30^\circ 46' 37''$$

Vlera e rezultantes së fituar sipas teoremës së kosinusit dhe sipas metodës së projeksioneve plotësisht është e barabartë.

Shembulli 9. *Në mënyrë grafike dhe analitike të caktohet rezultantja e forcave të dhëna të cilat veprojnë në një pikë materiale në rrafsh të njëjtë (fig. 29), nëse janë dhënë:*

$$F_1 = 12N; \qquad F_2 = 18N; \qquad F_3 = 16N;$$
$$\alpha_1 = 129^\circ; \qquad \alpha_2 = 315^\circ; \qquad \alpha_3 = 220^\circ$$

Zgjidhje:

Grafikisht:

(shkalla: 1 cm = 4 N)

Nga fig. 30 shihet se është:

$$R = 3{,}85 \times 4 = 15{,}4N$$
$$\varphi = 242^\circ$$

Vërejtje: Në poligonin e forcave nuk duhet të vizatohen forcat me rend, por patjetër të futen të gjitha forcat.

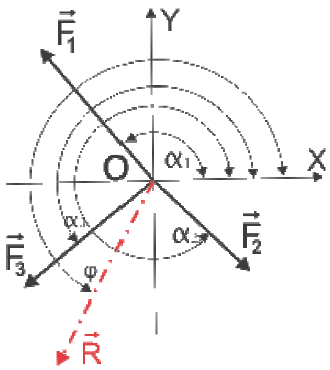


Fig. 29

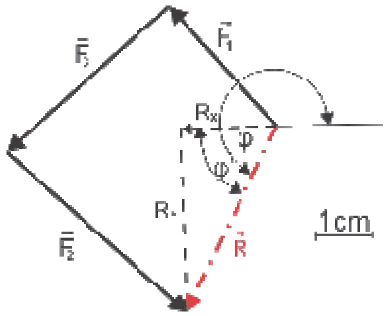


Fig. 30

Analitike:

Sipas (8) do të jetë:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 12 \cdot \cos 129° = 12 \cdot (-0,6293) = -7,5516N$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 18 \cdot \cos 315° = 18 \cdot 0,7071 = 12,7279N$$
$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha_3 = 16 \cdot \cos 220° = 16 \cdot (-0,7660) = -12,256N$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 12 \cdot \sin 129° = 12 \cdot 0,7771 = 9,32575N$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 18 \cdot \sin 315° = 18 \cdot (-0,7071) = -12,7279N$$
$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin\alpha_3 = 16 \cdot \sin 220° = 16 \cdot (-0,6428) = -10,2846N$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$
$$R_x = -7,5516 + 12,7279 - 12,256 = -7,0797N$$
$$R_y = 9,32575 - 12,7279 - 10,2846 = -13,68695N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-7,0797)^2 + (-13,68695)^2} = 15,40957N$$
$$tg\varphi' = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-13,68695}{-7,0797} = 1,9333; \qquad \varphi' = 62^\circ 38' 58''$$
$$\varphi = 180^\circ + \varphi' = 242^\circ 38' 58''$$

Shembulli 10. *Në mënyrë grafike dhe analitike të caktohet madhësia e drejtimit dhe kahjes së forcës $\vec{F}_4$ ashtu që ajo të jetë në baraspeshë me forcat $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ dhe $\vec{F}_3$, nëse janë dhënë:*

$$F_1 = 8N; \qquad F_2 = 10N; \qquad F_3 = 12N$$
$$\alpha_1 = 313^\circ; \qquad \alpha_2 = 151^\circ; \qquad \alpha_3 = 38^\circ$$

Zgjidhje:
Grafikisht: (shkalla: 1 *cm* = 3 *N*)

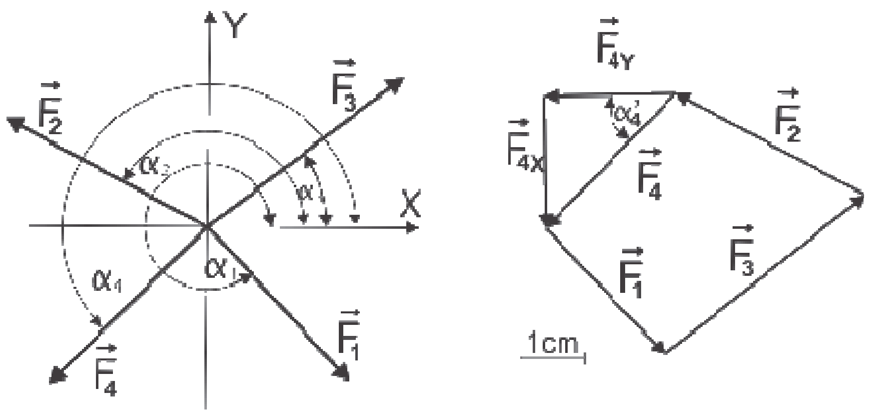


Fig. 31

Nga fig. 31 shihet se është:

$$F_4 = 3 \cdot 3 = 9,0N; \qquad \alpha_4 = 226^\circ$$

Analitike:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 8 \cdot \cos 313° = 8 \cdot 0,68199 = 5,45598N$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 10 \cdot \cos 151° = 10 \cdot (-0,8746) = -8,746N$$
$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha_3 = 12 \cdot \cos 38° = 12 \cdot 0,788 = 9,456N$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 8 \cdot \sin 313° = 8 \cdot (-0,73135) = -5,8508N$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 10 \cdot \sin 151° = 10 \cdot 0,4848 = 4,848N$$
$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin\alpha_3 = 12 \cdot \sin 38° = 12 \cdot 0,61566 = 7,3879N$$
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 0$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0$$

$$F_{4x} = -F_{1x} - F_{2x} - F_{3x} = -5,45598 - (-8,746) - 9,946 = -6,16598N$$
$$F_{4y} = -F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} = -(-5,8508) - 4,848 - 7,3879 = -6,3851N$$
$$F_4 = \sqrt{F_{4x}^2 + F_{4y}^2} = \sqrt{(-6,16598)^2 + (-6,3851)^2} = 8,8763N$$

$$tg\alpha' = \frac{F_{4y}}{F_{4x}} = \frac{-6,3851}{-6,16598} = 1,03554; \qquad \alpha_4' = 46^\circ 00' 01''$$
$$\alpha_4 = 180 + \alpha_4' = 226^\circ 00' 01''$$

Shembulli 11. *Në mënyrë grafike dhe analitike të caktohet madhësia, drejtimi dhe kahja e forcës $\vec{F}_3$ashtu që me forcat $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ ta japë rezultanten $\vec{R}$, nëse janë dhënë:*

$F_1 = 25kN;\quad F_2 = 15kN;\quad R = 12kN$

$\alpha_1 = 48^\circ\quad \alpha_2 = 290^\circ\quad \varphi = 335^\circ$

Zgjidhje:

Grafikisht: (shkalla: 1*cm* = 5kN)

Nga fig. 32 shihet se është: F_3 = 2,9 • 5 = 14,5kN; α_3 = 221°

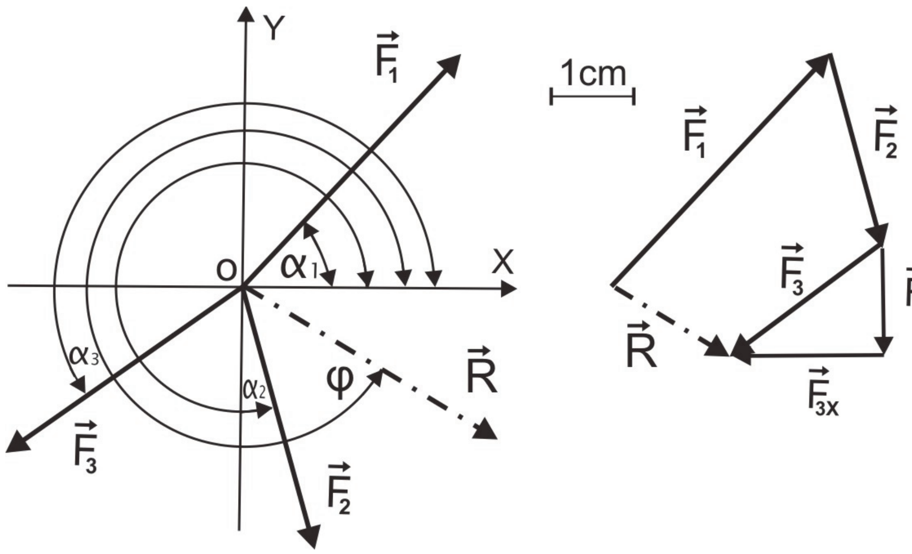


Fig. 32

Analitike:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 25 \cdot \cos 48° = 25 \cdot 0,6601 = 16,728kN$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 15 \cdot \cos 290° = 15 \cdot 0,342 = 5,1303kN$$

$$R_x = R \cdot \cos\varphi = 12 \cdot \cos 335° = 12 \cdot 0,9063 = 10,8757kN$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 25 \cdot \sin 48° = 25 \cdot 0,7431 = 18,5786kN$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 15 \cdot \sin 290° = 15 \cdot (-0,93969) = -14,0954kN$$

$$R_y = R \cdot \sin\varphi = 12 \cdot \sin 335° = 12 \cdot (-0,4226) = -5,0714kN$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$
$$F_{3x} = R - F_{1x} - F_{2x} = 10,8757 - 16,728 - 5,1303 = -10,9826kN$$
$$F_{3y} = R - F_{1y} - F_{2y} = -5,0714 - 18,5786 - (-14,0954) = -9,5546kN$$
$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2} = \sqrt{(-10,9826)^2 + (-9,5546)^2} = 14,557kN$$
$$tg\alpha_3 = \frac{F_{3y}}{F_{3x}} = \frac{-9,554}{-10,9826} = 0,8699;$$
$$\alpha_3 = 41^0 01' 15''$$
$$\alpha_3 = 180 + \alpha_3 = 221^0 01' 15''$$

Të përkujtohemi: Tabela për caktim analitik të vlerës së këndit φ në varësi nga parashenjat e komponentëve R_x dhe R_y.

TABELA

KATRORI	R_x	R_y	KËNDI
I.	+	+	$\varphi = \varphi', \varphi' < 90°$
II.	-	+	$\varphi = 180° - \varphi'$
III.	-	-	$\varphi = 180° + \varphi'$
IV.	+	-	$\varphi = 360° - \varphi'$

Shembulli 12. *Në mënyrë analitike të caktohet forca në shkopinjtë BC ($\vec{S}_1$) dhe AC ($\vec{S}_2$), ashtu që sistemi të jetë në baraspeshë* (fig. 33), *nëse forca është* $\vec{F}$ = 12*kN*.

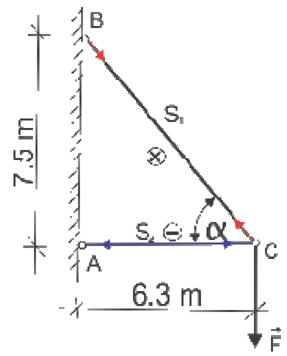


Fig. 33

Zgjidhje:

Të gjitha tri forcat ($\vec{F}$, $\vec{S_1}$ dhe $\vec{S_2}$) priten në një pikë, respektivisht në një nyje C. Nëse nyjën C e presim dhe e vrojtojmë nga larg, fitojmë një sistem prej tri forcave të cilat priten në një pikë. Njëra forcë $\vec{F}$ është e njohur, kurse dy të tjerat ($\vec{S_1}$ dhe $\vec{S_2}$) mund t'i caktojmë.

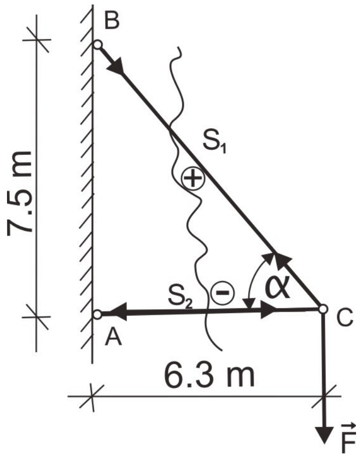


Fig. 34a

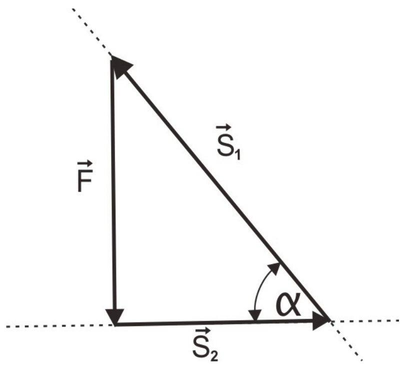


Fig. 34b

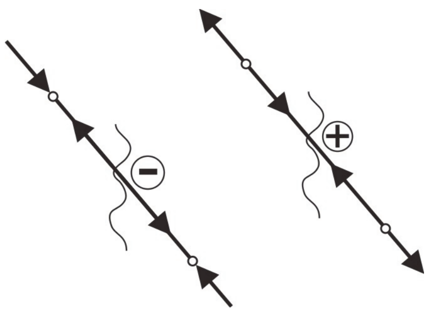


Fig. 34c

Forcat në shkopinj janë reaksione të veprimit të jashtëm të forcave.

Shenjat për forca në shkopinj sipas konventës merren gjatë shtrirjes së shkopit + (pozitiv), kurse gjatë shtypjes – (negativ).

Nga fig. 34c shihet se është:

$$S_1 = 5{,}2 \cdot 3 = 15{,}6kN \text{ (shtrirja)}$$
$$S_2 = 3{,}4 \cdot 3 = 10{,}2kN \text{ (shtypja)}$$

Analitike: Sipas metodës së projeksioneve:

Fillimin e sistemit kënddrejtë koordinativ e vendosim në nyjën e prerë C (fig. 35). Me ndihmë e të dy kushteve analitike për baraspeshë të një sistemi nga barazimi (12) që gjenden në një pikë në rrafsh të njëjtë, do të kemi: së pari nga fig. 34a

$$tg\alpha = \frac{7,5}{6,3} = 1,19; \qquad \alpha = 49^\circ 58' 11''$$

$$\sin\alpha = 0,7657; \qquad \cos\alpha = 0,6432$$

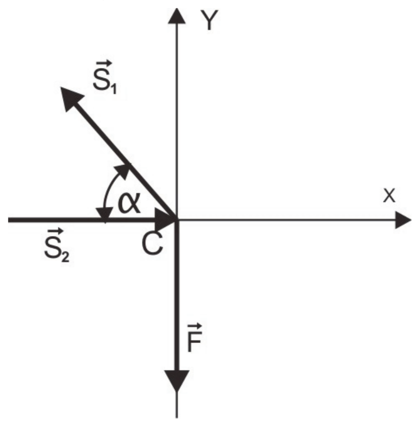


Fig. 35

$$\sum Y = 0$$

$$-F + S_1 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$S_1 = \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{12}{0,7656} = 15,672 kN \text{ (shtrirja)}$$

$$\sum X = 0$$

$$S_2 - S_1 \cos\alpha = 0; \quad S_2 = S_1 \cdot \cos\alpha = 15,672 \cdot 0,6432 = 10,08 kN \text{ (shtypja)}$$

Kontrolli: Nga fig. 34, shihet se:

$$tg\alpha = \frac{F_1}{S_2}; \qquad S_2 = \frac{F}{tg\alpha} = \frac{12}{1,19} = 10,08 kN$$

$$\sin\alpha = \frac{F}{S_1}; \qquad S_1 = \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{12}{0,7657} = 15,672 kN$$

$$\cos\alpha = \frac{S_2}{S_1}; \qquad 0,6432 = \frac{10,08}{15,672}; \qquad 0,6432 = 0,6432$$

Vërejtje: Gjatë zgjidhjes analitike të detyrave të tilla sipas metodës së projeksioneve mund të ndodhë që forca të fitojë vlerë negative. Kjo do të thotë se kahja e supozuar e asaj force nuk është e saktë. Kahja e vërtetë është e kundërt nga kahja e supozuar.

Shembulli 13. *Në mënyrë analitike të caktohen forcat* $\vec{S_1}$ dhe $\vec{S_2}$*, nëse është dhënë*

$$F_1 = 180N; \qquad F_2 = 160N$$

$$\alpha = 49^\circ; \qquad \beta = 62^\circ \qquad \text{largësia AB = 12 m}$$

Zgjidhje:

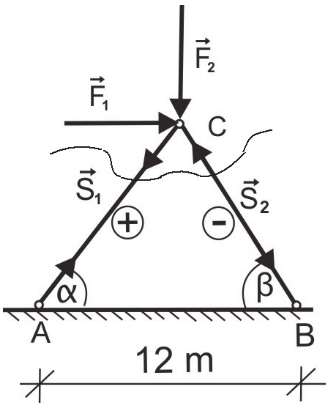


Fig. 37

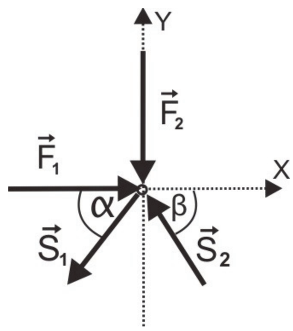


Fig. 38

Analitike: Sipas fig. 37:

$$\sum X = 0;$$

$$F_1 - S_1 \cdot \cos\alpha - S_2 \cdot \cos\beta = 0$$

$$180 - S_1 \cdot 0,656 - S_2 \cdot 0,4695 = 0$$

$$S_1 = \frac{180 - S_2 \cdot 0,4695}{0,656}$$

$$\sum Y = 0;$$

$$-F_2 - S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\beta = 0$$

$$-160 - S_1 \cdot 0,7547 + S_2 \cdot 0,883 = 0$$

$$-160 - 0,7547\left(\frac{180 - S_2 \cdot 0,4695}{0,656}\right) + S_2 \cdot 0,883 = 0$$

$S_2 = 257,919N$ shtypja; $\qquad S_1 = 89,797N$ shtrirja

DETYRA PËR USHTRIM

Shembulli 14: *Në mënyrë grafike dhe analitike të caktohet madhësia, drejtimi dhe kahja e forcës madhësia, drejtimi dhe kahja* $\vec{F_5}$ *ashtu që ajo të jetë në baraspeshë me forcat* $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ *dhe* $\vec{F_4}$ *nëse janë dhënë:*

$$F_1 = 6,3N; \qquad F_2 = 9,2N; \qquad F_3 = 8,1N; \qquad F_4 = 7,0N$$

$$\alpha_1 = 218^\circ; \qquad \alpha_2 = 39^\circ; \qquad \alpha_3 = 115^\circ; \qquad \alpha_4 = 251^\circ$$

Zgjidhje: $F_5 = 4,394N; \qquad \alpha_5 = 323^\circ 10' 24''$

Shembulli 15. *Në mënyrë analitike të caktohen forcat* $\vec{S_1}$ *dhe* $\vec{S_2}$ (*fig. 39*)*, nëse është dhënë*

$F = 25\text{kN}$

$\alpha = 36°$

Zgjidhje: S_1 = 16,2689*kN* (shtrirja) S_2 = 13,2436*kN* (shtypja)

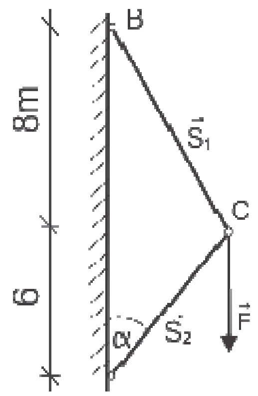


Fig. 39

3. STATIKA E PLLAKËS SË NGURTË

Në statikën e pikës materiale i mësuam kushtet e baraspeshës dhe ekuivalencës së forcave të cilat veprojnë në një pikë materiale. Në statikën e pllakës së ngurtë do t'i analizojmë kushtet e baraspeshës dhe ekuivalencën e forcave të cilat veprojnë në pika të ndryshme të pllakës së ngurtë.

Pllaka paraqet trup material në të cilën njëri dimension (lartësia) është shumë herë më i madh nga dy dimensionet e tjera (gjatësia dhe gjerësia). Në statikë e kemi sjellë nocionin pllaka e ngurtë d.m.th. pllaka e fortë ideale e cila nuk deformohet, respektivisht nuk e ndryshon formën as edhe vëllimin e vet nën ndikimin e çfarëdo lloj force. Në natyrë trupi i fortë ideal nuk ekziston, por për shkak thjeshtimit të dukurive të ndërlikuara të cilat ndodhin për shkak të vetive elastike dhe plastike të trupave, e aplikojmë supozim për pllakë të ngurtë.

Problemi gjatë analizimit të forcave të cilat veprojnë në pllakën e ngurtë në pikat e paramenduara mund të sillet në problemin e mbivendosjes së forcave të cilat veprojnë në pikën materiale, me ndihmën e aksiomës së tretë të statikës, nëse gradualisht dy nga dy forca sjellim që të veprojnë në kahje të njëjtë (fig. 40)

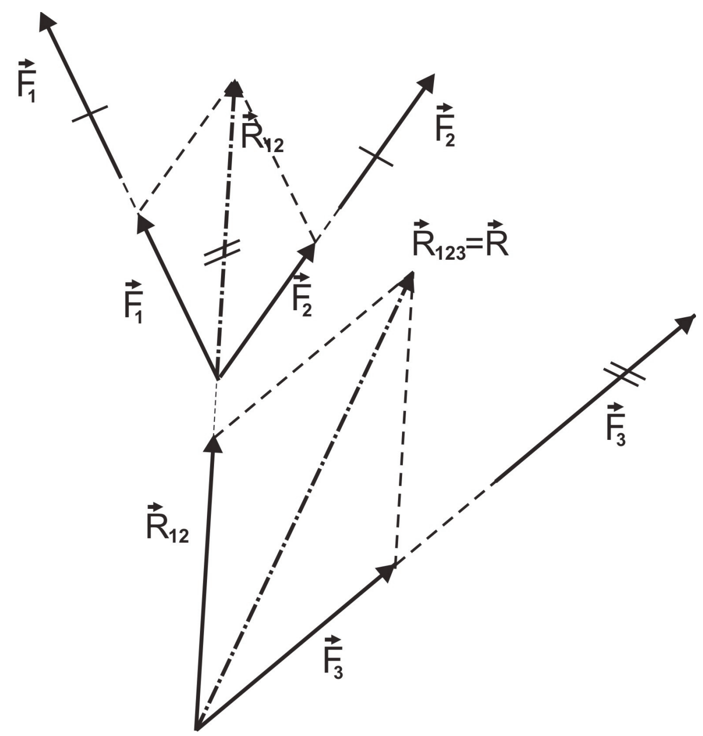


Fig. 40

Të përkujtohemi, nga aksioma e tretë e statikës është e njohur se me zhvendosje të pikës rënëse të forcës e cila vepron në trupin e ngurtë ose në pllakë nëpër gjatësinë e vijës së saj rënëse, nuk ndryshon veprimi i forcë.

3.1 MBIVENDOSJE E FORCAVE ME KAHJE TË PARAMENDUAR ME NDIHMËN E POLIGONIT VARGOR

Vërejmë një pllakë të ngurtë në të cilën veprojnë forcat $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ në pikat rënëse A dhe B (fig. 41). Sipas aksiomës së tretë të përmendur në statikë, forcat mund t'i zhvendosim nëpër gjatësinë e veprimit të tyre në pikën C, e cila është e prerë në vijën e saj rënëse. Sipas metodës së paralelogramit e caktojmë rezultanten R. Pika rënëse e rezultantes patjetër duhet të shtrihet në vijën e saj rënëse, të themi në pikën D.

Nëse kemi sistem të forcave të cilat veprojnë në pllakë të ngurtë me drejtime të ndryshme, të cilat nuk priten në vizatim ose janë paralele, rezultantja caktohet me ndihmën e **poligonit vargor**. Vërejmë një pllakë të ngurtë në të cilën veprojnë forcat $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ në pikat rënëse A dhe B (fig. 42), drejtimet e të cilave nuk priten në vizatim.

Në shkallë të përshtatshme e sjellim forcën $\vec{F}_1$ dhe në atë e ndërlidhim forcën $\vec{F}_2$ paralelisht me vijat e saja rënëse.

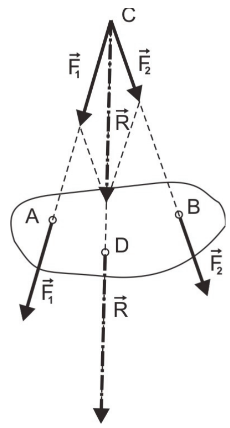


Fig. 41

Fillimi i forcës së parë dhe fundi i forcës së dytë, e definojnë rezultanten, d.m.th. madhësinë dhe kahjen e saj. Ky është plani i forcave (fig. 42.b).

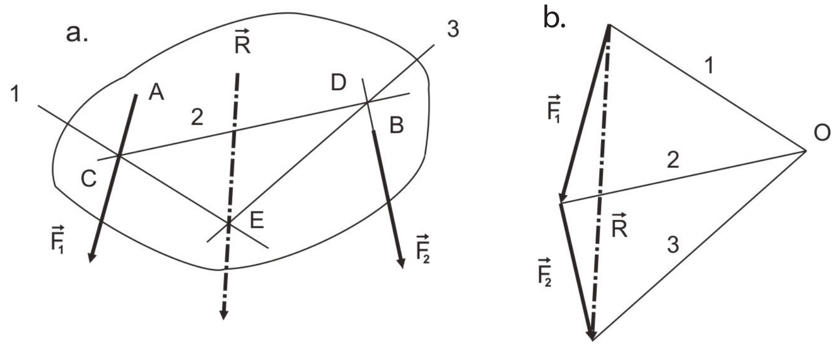


Fig. 42

Për caktimin e vijës rënëse të rezultantes në rrafshin e pllakës së ngurtë kemi shfrytëzuar poligonin vargor. E kemi përvetësuar pikën e paramenduar 0 të quajtur pol në afërsi të planit të forcave dhe e kemi lidhur me fillimin dhe fundin e të gjitha forcave. Këto forca 1, 2 dhe

3 quhen *rreze*. Në të vërtetë, forcën $\vec{F}_1$ e ekspozojmë në komponentët $\vec{1}$ dhe $\vec{2}$, forcën $\vec{F}_2$ në komponentët $\vec{2}$ dhe $\vec{3}$, kurse vetë rezultanten në komponentët $\vec{1}$ dhe $\vec{3}$. Forcat $\vec{F}$, $\vec{1}$ dhe $\vec{2}$ janë në baraspeshë sepse formojnë trekëndësh, që do të thotë priten në pikë. Tash tërheqim paralelen me rrezen 1 nëpër pikën e paramenduar C në vijën rënëse të forcës $\vec{F}_1$. Nga pika C tërheqim paralelen me rrezen 2 nga pika D, respektivisht deri te prerja në drejtim të forcës $F_{2.}$ Nga pika D e tërheqim rrezen 3 nga prerja me rrezen e parë, respektivisht me pikën E. Nëpër pikën E kalon vija rënëse e rezultantes $\vec{R}$. *Poligoni të cilin e përbëjnë rrezet* 1, 2 dhe 3 përkujton në varg dhe quhet ***poligon vargor***.

Me përvetësimin e ndonjë poli tjetër, mund ta përsëritim tërë këtë procedurë dhe do të bindemi në rezultatin e plotë.

Metoda e poligonit vargor për mbivendosje grafike të forcave ka zbatim të madh gjatë caktimit të rezultantes kur veprojnë shumë forca me drejtime të paramenduara ose paralele në pllakë të ngurtë.

Njohjen e deritashme teorike me metodën e mbivendosjes së forcave me drejtime të paramenduara ose paralele, të cilat veprojnë në pllakë të ngurtë ose në tra, do ta përsërisim nëpërmjet shembujve që vijojnë.

SHEMBUJ TË ZGJIDHUR

Shembulli 16. *Në trarin e ngurtë veprojnë forca më të vogla $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ me kahje të njëjtë në distancë reciproke l* = 7 m. *Duhet të caktohet madhësia, kahja dhe drejtimi i rezultantes $\vec{R}$ me ndihmën e poligonit vargor, nëse forcat e vlerës janë $F_1 = 25kN$; $F_2 = 35kN$.*

Zgjidhje:

(shkalla: për gjatësitë 1*cm* = 1*m*; për forcat 1*cm* = *10kN*)
Nga fig. 43 shihet se është:

$$R = 6 \times 10 = 60kN; \quad p = 4{,}1\text{m}; \quad q = 2{,}9\text{m}$$

Nga ky shembull mund të shihet se rezultantja e dy forcave paralele ka madhësi të barabartë me shumën e tyre algjebrike ($R = F_1 + F_2$), ka kahje të njëjtë, paralele me ato dhe me vijën e saj rënëse gjendet midis dy forcave, më afër se e madhja.

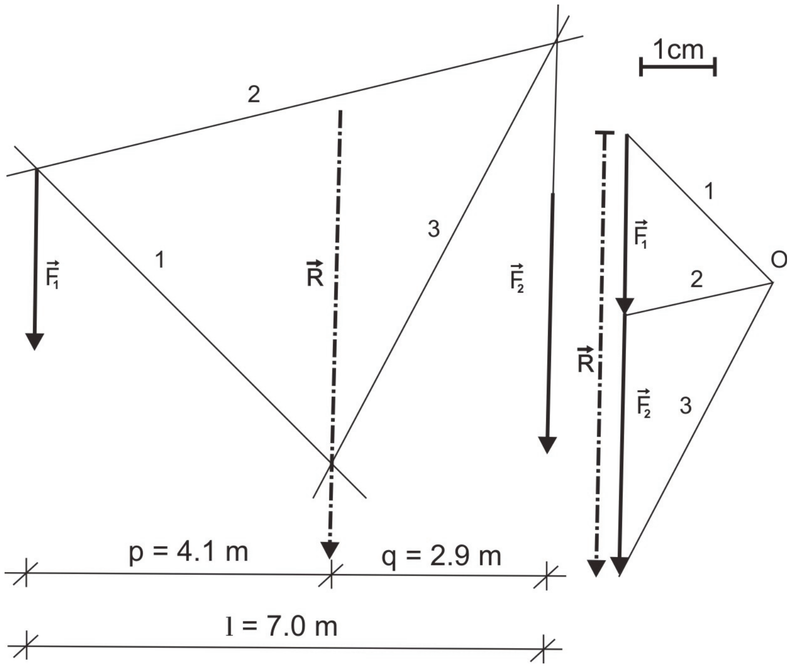


Fig. 43

Shembulli 17. *Me ndihmën e poligonit vargor duhet të caktohet rezultantja e dy forcave paralele me kahje të kundërta (forca antiparalele) të cilat veprojnë në pllakë të ngurtë, nëse janë dhënë:*

$$F = -150kN; \quad F_2 = 100kN; \quad l = 1,4\ m$$

Zgjidhje:

(shkalla: për gjatësitë 1*cm* = 0,5*m*; për forcat 1*cm* = *25kN*)
Nga fig. 44 shihet se është:

$$R = 2 \times 25 = 50\text{kN} \text{ (me kahje njëjtë si } \vec{F_1}\text{)}$$
$$p = 5,6 \times 0,5 = 2,8\text{m}; \quad q = 8,4 \times 0,5 = 4,2\text{m}$$

Nga ky shembull mund të shihet se rezultantja e dy forcave paralele me kahje të kundërta dhe me intensitete të ndryshme (forca antiparalele) ka madhësi të barabartë me ndryshimin e tyre ($R = F_2 - F_1$), me kahje të forcës më të madhe, paralele me ato, kurse vija e tyre rënëse është jashtë forcave edhe atë nga ana e forcës më të madhe.

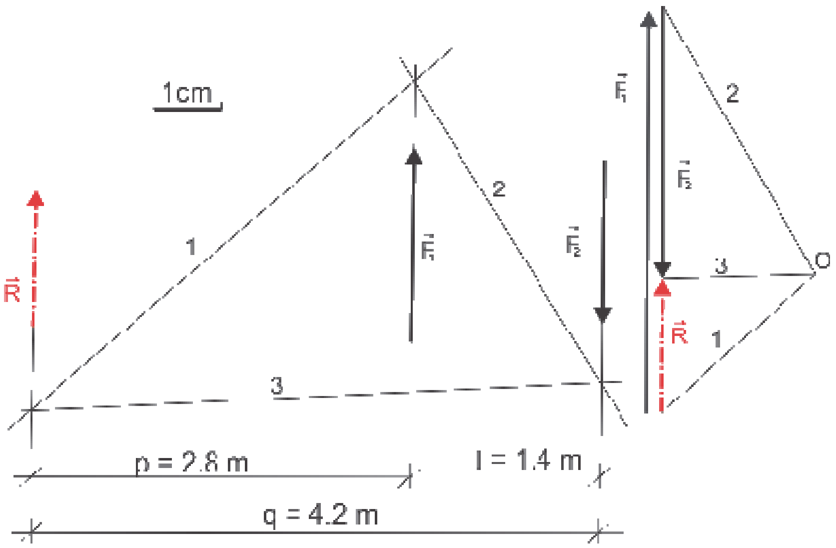


Fig. 44

Në mënyrë grafike dhe analitike për konstatimet e thëna në shembujt 16 dhe 17 ekzistojnë, por këtu nuk do t'i tërheqim.

Shembulli 18. *Me ndihmën e poligonit vargor duhet të caktohet rezultantja e sistemit të forcave paralele me kahje të paramenduar, nëse janë dhënë:* $F_1 = 16N$; $F_2 = -20N$; $F_3 = 8N$; $a = 7$m (*largësia midis* $\vec{F}_1$ *dhe* $\vec{F}_2$); *b* = 9*m* (*largësia midis* $\vec{F}_2$ *dhe* $\vec{F}_3$).

Zgjidhje:
(shkalla: për gjatësitë 1*cm* = 2*m* për forcat 1*cm* = 4 *N*)
Nga fig. 45 shihet se është:

$$R = 1 \cdot 4 = 4N; \qquad p = 1,5 \cdot 2 = 3m$$

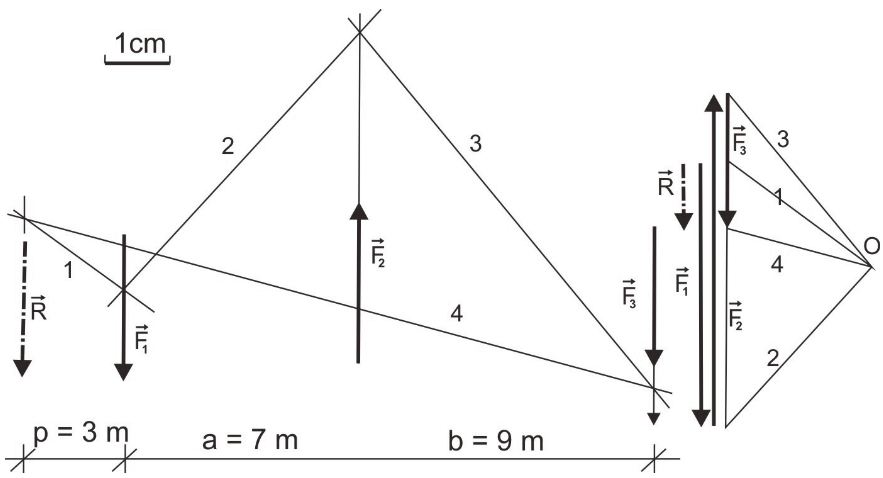


Fig. 45

Shembulli 19. *Me ndihmën e poligonit vargor duhet të caktohet rezultantja e dy forcave të paramenduara të cilat veprojnë në trarin e ngurtë, nëse janë dhënë:* $F_1 = 5\text{kN}$; $\alpha_1 = 240$; *veprojnë në pikën A dhe* $F_2 = 8kN$; $\alpha_2 = 330$; *veprojnë në pikën B. Largësia* $\overline{AB} = 6\text{m}$.

Zgjidhje:

(shkalla: për gjatësitë 1*cm* = 1*m* për forcat 1*cm* = 2*kN*)
Nga fig. 46 shihet se është:

$$R = 4,7 \cdot 2 = 9,4kN; \quad \varphi = 298^\circ \quad \text{largësia} \quad \overline{AC} = 2,9m \ .$$

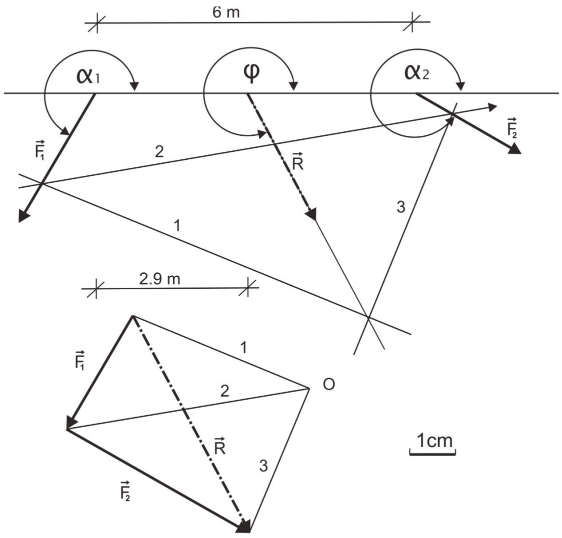


Fig. 46

DETYRA PËR USHTRIM

Shembulli 20. *Me ndihmën e poligonit vargor duhet të caktohet rezultantja e sistemit të forcave paralele me kahje të paramenduar, nëse janë dhënë:* $F_1 = -8kN; F_2 = 12kN; F_3 = 6kN$; $\alpha = 3\text{m}$ *(largësia midis* $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$*); b* = 4m *(largësia midis* $\vec{F}_2$ dhe $\vec{F}_3$)

Zgjidhje: $R = 10\text{kN}$; $p = 7,8\text{m}$.

Shembulli 21. *Me ndihmën e poligonit vargor duhet të caktohet rezultantja e dy forcave të paramenduara të cilat veprojnë në trarin e ngurtë, nëse janë dhënë:* $F_1 = 65N$; $\alpha_1 = 42°$; $F_2 = 90N$; $\alpha_2 = 110°$, forca $\vec{F}_1$ veprojnë në pikën A, kurse forca $\vec{F}_2$ në pikën B. Largësia $\overline{AB} = 8\text{m}$.

Zgjidhje: $R = 129N$; $\varphi = 82°$ largësia $\overline{AC} = 5,2\text{m}$.

3.2 MOMENTİ STATİK İ FORCËS

Kur në trupin e lirë material vepron forca me madhësi, drejtim dhe kahje të caktuar, ai trup lëviz në drejtim dhe kahje të asaj force. Kjo është lëvizja translatore. Në rastin kur në atë trup të ekzistojë një pikë jolëvizëse ose kahje jashtë vijës rënëse të forcës, trupi nuk do të lëvizë në mënyrë translatore, por do të rrotullohet. Këtë veprim të kundërt të forcës rreth pikës së paramenduar e quajmë **moment statik të forcës** dhe shënohet me M. Pika A, rreth të cilës bëhet rrotullimi, quhet pikë momentale, kurse largësia momentale nga ajo pikë e forcës është **krah i forcës** (fig. 47).

Momenti statik i forcës paraqet prodhimin e intensitetit të forcës *F* dhe largësisë së saj më të shkurtë (normale) "a" deri te pika e vrojtuar (pika momentale).

$$M = F \times a \qquad (13)$$

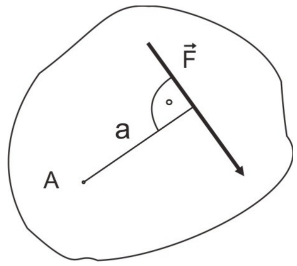


Fig. 47

Dimensionet e momentit statik janë Nm ose kNm. Në rast kur forca rrotullohet në raport me pikën momentale O_1 në kahje të akrepit të orës (fig. 48), themi se momenti statik është pozitiv (+), e nëse rrotullohet në drejtim të kundërt, atëherë momenti statik është negativ (-).

Madhësia e momentit statik të forcës është e barabartë me syprinën e dyfishtë të trekëndëshit që e përbëjnë vetë forca $\vec{F}$ si bazë dhe krahu "a" si lartësi (fig. 49).

$$A_\Delta = \frac{\overline{AB} \cdot a}{2} = \frac{F \cdot a}{2} = \frac{M}{2}; \qquad M = 2A_\Delta$$

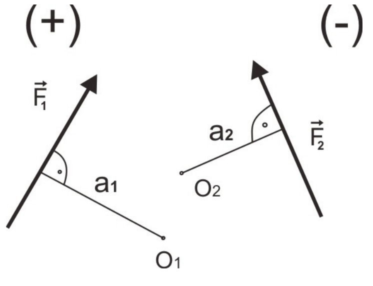


Fig. 48

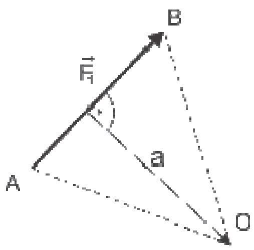


Fig. 49

Momenti statik për ndonjë pikë është i barabartë me zero në rastin kur vija rënëse e forcës kalon nëpër atë pikë. Kur në një rrafsh vepron një sistem i forcave, raporti që ekziston midis momenteve statike të forcave dhe momentit statik të rezultantes së tyre është dhënë në Varinjon (PIERRE VARIGNON, 1654 — 1722).

Për forcat $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ të cilat veprojnë në pikën materiale A, me metodën e paralelogramit e caktojmë rezultantën $\vec{R}$ (fig. 50). Në pikën A e vendosim sistemin koordinativ. Këndet i shënojmë me α_1, α_2 dhe α_R. Momentin statik të forcave $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ dhe rezultanten $\vec{R}$ e tyre do t'i caktojmë në raport me pikën momentale B në largësinë l nga pika O, e cila shtrihet në abshisën **x**.

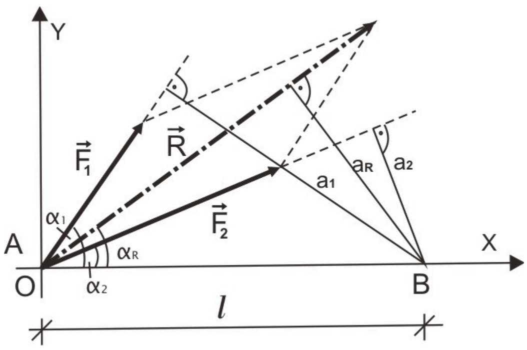


Fig. 50

$$M_R = R \cdot a_R; \qquad M_1 = F_1 \cdot a_1; \qquad M_2 = F_2 \cdot a_2;$$

Nga barazimi (8) vijon: $R_y = F_{1y} + F_{2y}$;

$$R \cdot \sin\alpha_R = F_1 \cdot \sin\alpha_1 + F_2 \cdot \sin\alpha_2$$

Nëse këtë barazim e shumëzojmë me *l* do të fitohet:

$$R \cdot l \cdot \sin\alpha_R = F_1 \cdot l \cdot \sin\alpha_1 + F_2 \cdot l \cdot \sin\alpha_2$$

Nga fig. 50 shihet se është:

$$\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{l}; \Rightarrow a_1 = l \cdot \sin\alpha_1; \qquad \sin\alpha_2 = \frac{a_2}{l}; \Rightarrow a_2 = l \cdot \sin\alpha_2$$

$$\sin\alpha_R = \frac{a_R}{l}; \qquad R \cdot a_R = F_1 a_1 + F_2 \cdot a_2; \qquad M_R = M_1 + M_2$$

ose për shumë forca do të jetë:

$$M_R = \sum_{i=1}^{i=n} M_{Fi} \tag{14}$$

Prej këtu vijon ky rregull:

Momenti statik i rezultantes së dy ose më tepër forcave në raport me pikën e njëjtë momentale, e cila shtrihet në rrafshin e forcave, është i barabartë me shumën algjebrike të momenteve të atyre forcave për pikën e njëjtë momentale. Ky është rregull i momentit ose teoremë e Varinjit.

Për sistemin e forcave të cilat janë në baraspeshë, rezultantja është e barabartë me zero, prandaj edhe momenti statik i sistemit të tillë të forcave është i barabartë me zero. Ky kusht për baraspeshë të forcave shprehet me:

$$\sum M = 0 \qquad (15)$$

Në bazë të barazimit (12) dhe (15) mund të konstatohet kushti analitik i baraspeshës: trupi është në baraspeshë kur shuma algjebrike e të gjithë komponentëve horizontalë dhe vertikalë të forcave të cilat veprojnë në një rrafsh të atij trupi është e barabartë me zero edhe kur shuma e forcave momentale në raport me ndonjë pikë të paramenduar në atë rrafsh është e barabartë me zero, (16).

$$\sum X = 0\,; \quad \sum Y = 0\,; \quad \sum M = 0\,; \qquad (16)$$

Shprehja analitike për momentin statik të forcës në raport me pikën e paramenduar (ku e vendosim fillimin e sistemit koordinativ) mund të jepet me zbatimin e teoremës së Varinjit (fig. 51), prej ku del barazimi (17).

$$M^{\circ}{}_{F} = M^{\circ}{}_{Fx} + M^{\circ}{}_{Fy}$$

$$M^{\circ}{}_{F} = F \cdot a = F_x \cdot y - F_y \cdot x \qquad (17)$$

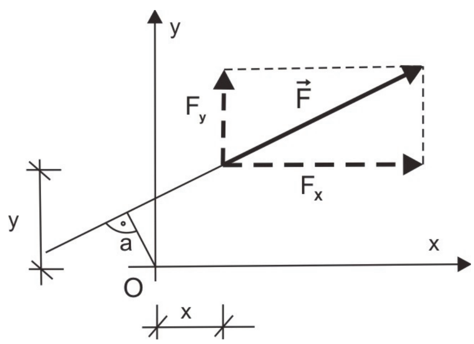


Fig. 51

SHEMBUJ TË ZGJIDHUR

Shembulli 22. *Me zbatimin e rregullës momentale Të caktohen forcat $\vec{S_1}$ dhe $\vec{S_2}$ në shkopinjtë AC dhe BC (fig. 52) nëse është dhënë forca $\vec{F}$ = 50kN. Rezultati të kontrollohet sipas metodës së projeksioneve.*

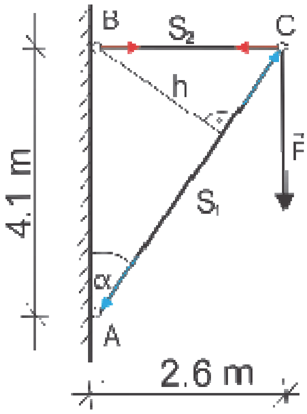


Fig. 52

Zgjidhje:

Nëse në mënyrë fiktive i presim shkopinjtë AC dhe BC, pika C do të jetë në baraspeshë vetëm në rastin kur forca *F* me forcat $\vec{S_1}$ *dhe* $\vec{S_2}$ japin poligon të mbyllur. Ngase sistemi është në baraspeshë, patjetër edhe shuma algjebrike e momenteve statike në raport me cilëndo pikë qoftë në rrafsh të forcave të jetë e barabartë me zero. Pikën momentale e përvetësojmë ashtu që eliminojmë njërën nga forcat e panjohura (pikën e përvetësojmë në pikën e saj rënëse, e meqë nuk ka krah, nuk ka edhe moment).

a) me zbatimin e rregullës momentale : nga fig. 54 shihet

$$\sum M_A = 0 \ ;$$

$$F \cdot 2,6 - S_2 \cdot 4,1 = 0$$

$$S_2 = \frac{F \cdot 2,6}{4,1} = \frac{50 \cdot 2,6}{4,1} = 31,707kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F \cdot 2,6 - S_1 \cdot h = 0$$

$$\Delta ABC; \quad tg\alpha = \frac{2,6}{4,1} \qquad \alpha = 32°22\ 50''$$

$$\Delta ADB; \quad \sin\alpha = \frac{h}{4,1}$$

$$h = 4,1 \cdot 0,53554 = 2,1957m$$

$$S_1 = \frac{F \cdot 2,6}{h} = \frac{50 \cdot 2,6}{2,1957} = 59,206kN$$

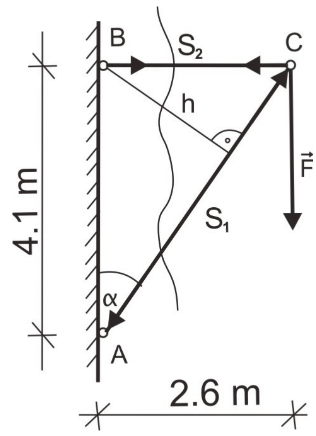


Fig. 53

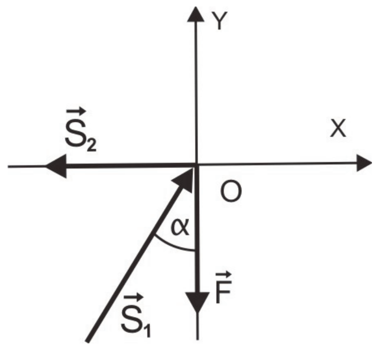


Fig. 54

b) sipas metodës së projeksioneve: nga fig. 55 shihet se:

$\sum Y = 0$; $\quad -F + S_1 \cdot \cos\alpha = 0$

$$S_1 = \frac{F}{\cos\alpha} = \frac{50}{0,8445} = 59,206kN$$

$\sum X = 0$; $\quad -S_2 + S_1 \cdot \sin\alpha = 0$

$$S_2 = S_1 \cdot \sin\alpha$$

$$S_2 = 59,206 \cdot 0,53554 = 31,707kN$$

Shembulli 23. *Me zbatimin e rregullës momentale të caktohen $\vec{S_1}$ dhe $\vec{S_2}$ në sistemin i cili është në baraspeshë.*

$$AC = 6m$$
$$F = 12kN$$
$$S_1 = ? \qquad S_2 = ?$$

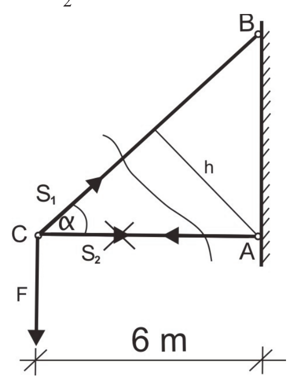


Fig. 56

1. ANALITIKE

Kushti:

$$\sum M_A = 0$$

$$F \cdot AC - S_1 \cdot h = 0$$

$$S_1 = \frac{F \cdot AC}{h}$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{6}$$

$$h = \sin 42° \cdot 6$$

$$h = 0,66913 \cdot 6 = 4m$$

$$S_1 = \frac{12 \cdot 6}{4} = 18kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F \cdot AC + S_2 \cdot AB = 0$$

$$S_2 = \frac{-F \cdot AC}{AB}$$

$$tg\alpha = \frac{AB}{AC}$$

$$AB = tg 42° \cdot AC$$

$$AB = 0,90040 \cdot 6 = 5,4m$$

$$S_2 = \frac{-12 \cdot 6}{5,4} = -13,3kN$$

Vërejtje: shenja "-" do të thotë se forca është vendosur në anën e kundërt dhe duhet të bëhet korrigjim i kahjes së vendosur të αι. 56

Shembulli 24. *Me zbatimin e rregullës momentale të caktohen $\vec{S_1}$ dhe $\vec{S_2}$ në sistemin i cili është në baraspeshë.*

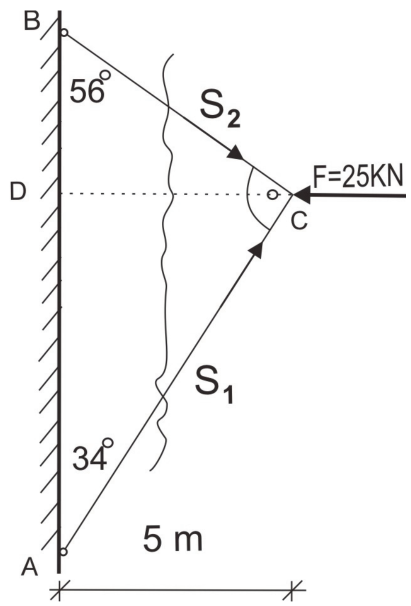


Fig. 57

1. ANALITIKE

$$\sum M_A = 0$$

$$-F \cdot \overline{AD} + S_2 \cdot \overline{AC} = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F \cdot \overline{BD} - S_1 \cdot \overline{BC} = 0$$

$$tg34° = \frac{5}{\overline{AD}}$$

$$\overline{AD} = 7,42m$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 55,05 + 25 = 80,05$$

$$\overline{AC} = 8,94m$$

$$tg56° = \frac{5}{\overline{BC}} = \frac{5}{3,37} = 1,48$$

$$\overline{BD} = \frac{5}{tg56°} = \frac{5}{1,48} = 3,37m$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 = 11,36 + 25 = 36,36m$$

$$\overline{BC} = 6,02m$$

$$\overline{AB} = 10,79m$$

$$S_1 = \frac{F \cdot \overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{25 \cdot 3,37}{6,02} = \frac{84,25}{6,02} = 13,99kN$$

$$S_2 = \frac{F \cdot \overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{25 \cdot 7,42}{8,94} = \frac{185,5}{8,94} = 20,74kN$$

Shembulli 25. *Me zbatimin e rregullës momentale të caktohet rezultantja e forcave paralele të cilat veprojnë në një trup të ngurtë, nëse janë dhënë* $F_1 = 8,9N;$ $F_2 = 20N;$ $F_3 = 15,3\text{N};$ $a = 12\text{m},$ $b = 8m;$ ***a*** *- largësia midis* $\vec{F}_1$ *dhe* $\vec{F}_2$*;* ***b*** *- largësia midis* $\vec{F}_2$ *dhe* $\vec{F}_3$*.*
Me ndihmën e poligonit vektorial të bëhet kontrolli i rezultatit.

Zgjidhje

Analitike:

Pikën momentale e përvetësojmë në vijën rënëse të forcës $\vec{F}_1$ dhe e zbatojmë teoremën e Varinjonit:

$$R \cdot c = F_2 \cdot a + F_3 \cdot (a + b) \qquad R = F_1 + F_2 + F_3$$

$$c = \frac{F_2 \cdot a + F_3 \cdot (a + b)}{R} \qquad R = 8,9 + 20 + 15,3 = 44,2N$$

$$c = \frac{20 \cdot 12 + 15,3 \cdot (12+8)}{44,2} = 12,353m$$

Grafikisht: (shkalla: 1*cm* = 2,5*m*; për gjatësi: 1*cm* = 5*N* për forcat)

$$R = 8,8 \cdot 5 = 44N$$
$$c = 4,9 \cdot 2,5 = 12,25m$$

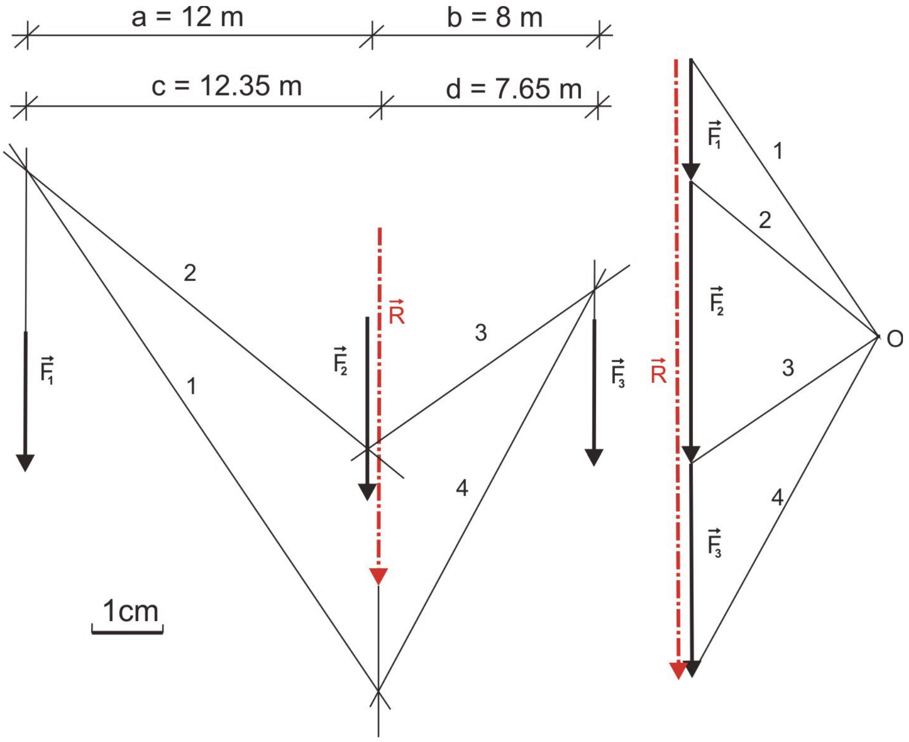


Fig. 58

Shembulli 26. *Me zbatimin e rregullës momentale të caktohen madhësitë dhe kahjet e forcave $\vec{F}_A$ dhe $\vec{F}_B$ ashtu që sistemi i dhënë i forcave paralele të jetë në baraspeshë, fig. 59, nëse janë dhënë:*

$F = 16kN$; $F_2 = -18kN$; $F_3 = 22kN$;

Zgjidhje:

$$\sum M_A = 0$$
$$F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot (2+1,5) + F_B(2+1,5+1) + F_3 \cdot 5,7 = 0$$
$$F_B = \frac{-16 \cdot 2 - 18 \cdot 3,5 - 22 \cdot 5,7}{4,5} = -20,97N$$

Parashenja negative do të thotë se kahja e supozuar e forcës nuk është e saktë, ajo forcë në mënyrë reale vepron kah lart.

$\Sigma M_B = 0$

$$-F_A \cdot 4,5 - F \cdot 2,5 + F_2 \cdot 1 + F_3 \cdot 1,2 = 0$$

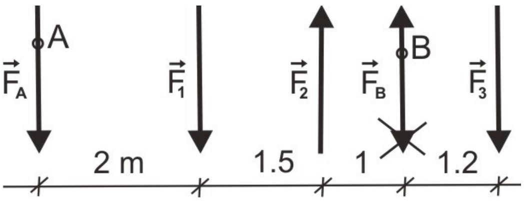


Fig. 59

Kontrolli:

$$\sum Y = 0$$
$$F_A + F_1 - F_2 - F_B + F_3 = 0$$
$$0,978 + 16 - 18 - 20,978 + 22 = 0$$
$$38,978 = 38,978$$
$$0 = 0$$

DETYRA PËR USHTRIM

Shembulli 27. *Me zbatimin e rregullës momentale Të caktohen forcat* $\vec{S_1}$ *dhe* $\vec{S_2}$ (fig. 60) *nëse është dhënë forca* $F = 20kN$.

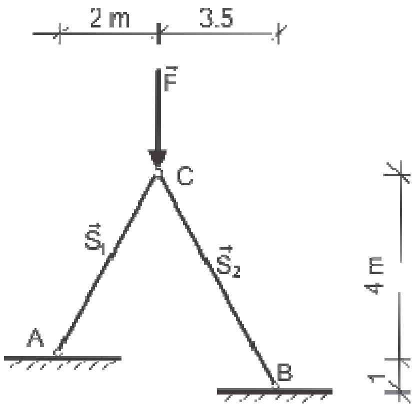


Fig. 60

Zgjidhje: $\vec{S_1} = 13{,}04\text{kN}$
$\vec{S_2} = 10{,}17kN$

Shembulli 28. Me zbatimin e rregullës momentale të caktohen madhësitë dhe kahjet e forcave $\vec{F}_{\text{A}}$ dhe $\vec{F}_{\text{B}}$ ashtu që sistemi i dhënë i forcave paralele të jetë në baraspeshë (fig. 61), nëse janë dhënë:

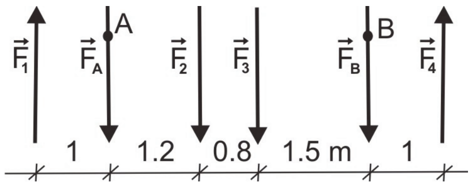


Fig. 61

$F_1 = -63N$; $F_2 = 91N$; $F_3 = 58N$; $F_4 = -72N$;

Zgjidhje: $F_A = -24,228N$; $F_B = 10,228N$.

3.3. MBİVENDOSJA E FORCAVE NË DY KOMPONENTË PARALELË

Mbivendosja analitike e forcave në dy komponentë paralelë është e mundur me zbatimin e rregullës momentale. Në rastin që ata komponentë të priten, procedura është shpjeguar në shembullin nr. 22 dhe 23. Në rastin që ata komponentë të jenë paralelë, procedura është shpjeguar në shembullin nr. 25.

Mbivendosjen grafike të forcave në dy komponentë në rastin kur ata komponentë priten, e kemi parë në shembullin nr. 12 dhe nr. 13.

Në këtë kapitull do të njihemi me mbivendosjen grafike të forcave në dy komponentë nëse këta komponentë të jenë paralelë. Kjo mund të bëhet vetëm me zbatimin e poligonit vargor.

Forcën $\vec{F}$ duhet ta mbivendosim në komponentët paralelë $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ të cilët përputhen me drejtimet e dhëna I-I dhe (Fig. 62).

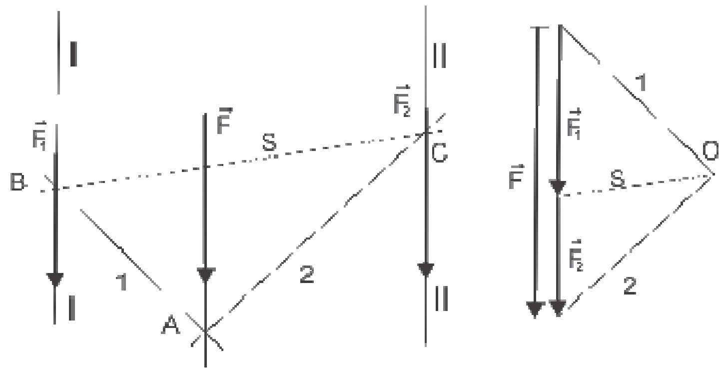


Fig. 62

Forcën $\vec{F}$ e bartim në shkallë më të madhe (plan të forcave), e përvetësojmë në mënyrë të paramenduar polin O dhe i tërheqim rrezet 1 dhe 2, kurse në nënvijën rënëse nëpër pikën e paramenduar të forcës $\vec{F}$ tërheqim paralele me rrezen 1 deri te pika B dhe rrezen 2 deri te pika C. Pikat B dhe C i lidhim me vijën S ---- të mesme. Tërheqim paralele me S nëpër fushën O dhe me atë në planin e forcave $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$.

Kur kemi sistem të forcave paralele me kahja të paramenduar, e zbërthejmë rezultanten e tyre. Në statikë shumë shpesh vendosen detyra të tilla, por janë treguar me fjalë të tjera. Zakonisht është dhënë sistemi i forcave paralele me kahje (aksione) të paramenduara, kurse kërkohen të dy forcat e tjera paralele (reaksionet), të cilat janë në baraspeshë me sistemin e dhënë. Në të vërtetë, rezultantja e forcave (aksioneve) duhet të zbërthehet në dy komponentë (reaksione), me kahje të kundërt, për shkak të baraspeshës së tërë sistemit të forcave.

Të mbajmë mend:

1. **Plani i forcave vizatohet zakonisht nga ana e djathtë e sistemit të dhënë të forcave.**
2. **Rezultantja në planin e forcave është gjatësia midis rrezes së fundit dhe mjedisit me kahje deri te rrezja e fundit kah mjedisi.**
3. **Reaksioni F_B në planin e forcave është gjatësia midis rrezes së fundit dhe mjedisit me kahje deri te rrezja e fundit kah mjedisi.**

4. **Reaksioni FA në planin e forcave është gjatësia midis mjedisit dhe rrezes së fundit me kahje deri te rrezja e fundit kah mjedisi.**

Ngase sistemi është në baraspeshë, rezultantja e forcave të dhëna, sipas madhësisë është e barabartë me rezultanten e reaksioneve, por me kahje të kundërt. Forcat vizatohen në shkallë të planit të forcave.

Në disa shembuj karakteristikë do të zgjidhen detyrat e tilla.

<u>SHEMBUJ TË ZGJIDHUR</u>

Shembulli 29. *Janë dhënë forcat paralele $F_1 = 4{,}5kN$ dhe $F_1 = 6{,}0kN$* (fig. 63), *të gjenden dy forca paralele me kahje të paramenduara F_A dhe F_B të cilat me forcat e dhëna $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ do të jenë në baraspeshë. Kontrolli i rezultateve të fituara grafikisht të bëhet sipas metodës analitike.*

Të gjenden dy forca paralele $\vec{F}_A$ dhe $\vec{F}_B$ të cilat me forcat e dhëna $\vec{F}_1$ dhe $\vec{F}_2$ do të jenë në baraspeshë?

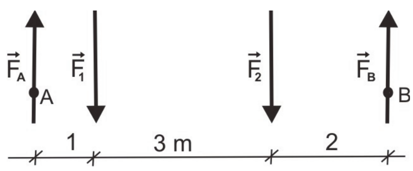


Fig. 63

$F_1 = 4{,}5\text{kN}$; $F_2 = 6{,}0\text{kN}$

Zgjidhje:

Grafikisht: (shkalla: 1*cm* = 1*m;* për gjatësitë, *1cm = 2kN;* për forca)

Nga fig. 64 shihet se:

$$F_A = 5{,}8 \cdot 1 = 5{,}8kN$$
$$F_B = 4{,}7 \cdot 1 = 4{,}7kN$$

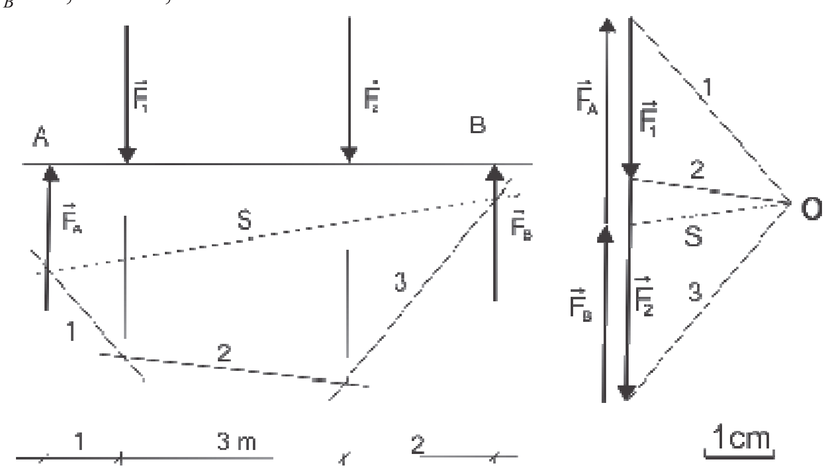


Fig. 64

Analitike:

$$\sum M_A = 0$$
$$F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 6 = 0$$
$$F_B = \frac{4,5 \cdot 1 + 6 \cdot 4}{6} = 4,75kN$$
$$\sum M_B = 0$$
$$F_A \cdot 6 - F_1 \cdot 5 - F_2 \cdot 2 = 0\,;$$
$$F_A = \frac{45 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{6} = 5,75kN$$

Kontrolli i metodës analitike:

$$\sum Y = 0$$
$$F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0\,;$$
$$5,75 - 4,5 - 6,0 + 4,75 = 0\,;$$
$$10,5 - 10,5 = 0\,;$$
$$0 = 0$$

Shembulli 30. *Në mënyrë grafike dhe analitike Të caktohen forcat* $\vec{F}_A$ *dhe* $\vec{F}_B$ *të cilat e barazojnë sistemin e dhënë të forcave* (fig. 65), *nëse janë:*

$$F_1 = 25kN; F_2 = 30kN; F_3 = 35kN$$

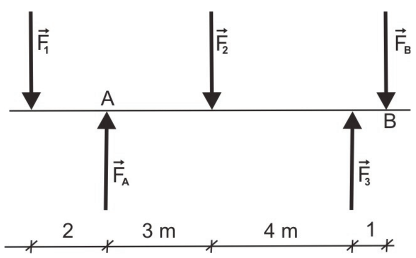


Fig. 65

Zgjidhje:

Grafikisht: (shkalla: *1cm = 2m; 1cm = 10kN*)

Nga fig. 65 shihet se: $F_A = 4,6 \cdot 10 = 46\text{kN}$

$F_A = 2,6 \cdot 10 = 26kN$

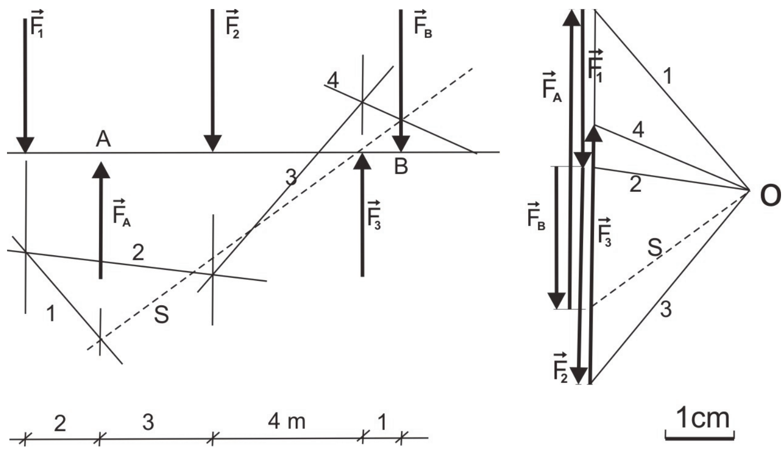


Fig. 65

Analitike:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 3 - F_3 \cdot 7 + F_B \cdot 8 = 0;$$

$$F_B = \frac{25 \cdot 2 - 30 \cdot 3 + 35 \cdot 7}{8} = 25,625kN.$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$- -F_1 \cdot 10 + F_A \cdot 8 - F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 1 = 0;$$

$$F_A = \frac{25 \cdot 10 - 30 \cdot 5 + 35 \cdot 1}{8} = 45,625kN.$$

Kontrolli:

$$\sum Y = 0;$$

$$-F_1 + F_A - F_2 + F_3 - F_B = 0$$

$$-25 + 45,625 - 30 + 35 - 25,625 = 0$$

$$80,625 - 80,625 = 0$$

$$0 = 0$$

Shembulli 31. *Në mënyrë grafike dhe analitike Të caktohen forcat* $\vec{F}_A$ *dhe* $\vec{F}_B$ *të cilat e barazojnë sistemin e dhënë të forcave* (fig. 66), *nëse është:*

$$F_1 = -F_2 = 10kN$$

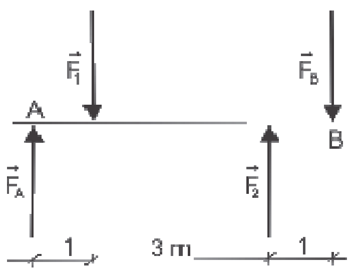


Fig. 66

Zgjidhje:

Rastin e veçantë të paraleleve me kahje të kundërta, kur ato forca janë me madhësi të barabartë, e quajmë **bashkim të forcave**. Rezultantja e bashkimit të forcave është e barabartë me zero, që do të thotë se trupi nuk lëviz në mënyrë translatore. Bashkimi i forcave shkakton rotacion të pastër. Veprimin statik të bashkimit të forcave e quajmë moment të bashkimit dhe ai është i barabartë me prodhimin e një force dhe krahut të bashkimit (krahu i bashkimit është distanca më e shkurtë reciproke e forcave).

Grafikisht: (shkalla: 1*cm* = 1*m*; 1*cm* = 2*kN*)
Nga fig. 67 shihet se:

$$F_A = -6 \cdot 1 = -6kN; \qquad F_B = 6 \cdot 1 = 6kN$$

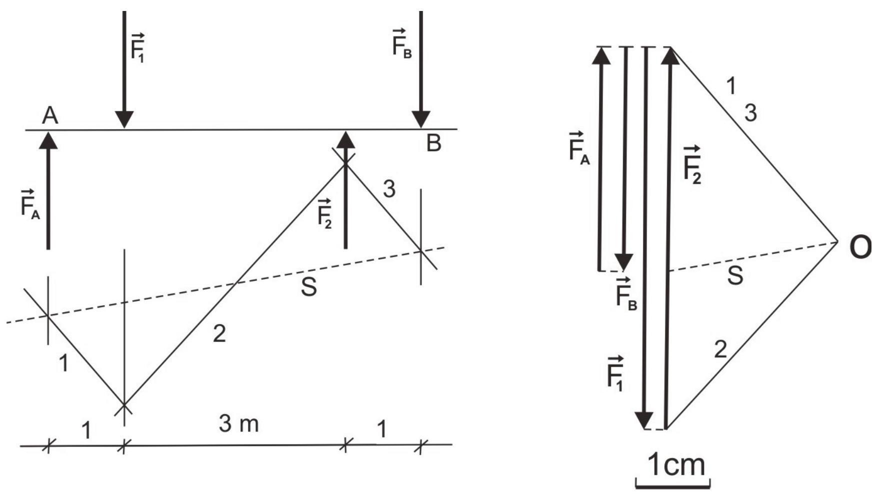


Fig. 67

Analitike:

$$\sum M_A = 0;$$
$$F_1 \cdot 1 - F_2 \cdot 4 + F_B \cdot 5 = 0$$

$$F_B = \frac{-10 \cdot 1 + 10 \cdot 4}{5} = 6,0kN$$
$$\sum M_B = 0;$$
$$F_A \cdot 5 - F_1 \cdot 4 + F_2 \cdot 1 = 0$$
$$F_A = \frac{10 \cdot 4 - 10 \cdot 1}{5} = 6kN$$

Kontrolli:

$$\sum Y = 0;$$

$$-F_A + F_1 - F_2 + F_B = 0;$$

$$-6 + 10 - 10 + 6 = 0$$

$$16 - 16 = 0$$

$$0 = 0$$

Vërejtje: Në shembullin tonë bashkimit negativ M_1 ($M_1 = -10 \cdot 3 = -30kNm$) i kundërvihet bashkimi pozitiv M_2 ($M_2 = 6 \cdot 5 = 30kNm$), prandaj sistemi i tërësishëm i forcave është në baraspeshë.

DETYRA PËR USHTRIM

Shembulli 32. *Në mënyrë grafike dhe analitike Të caktohen forcat* $\vec{F}_A$ *dhe* $\vec{F}_B$ *të cilat e barazojnë sistemin e dhënë të forcave* (fig. 68), *nëse janë:*
$F_1 = 8kN; F_2 = 12kN; F_3 = 6kN$

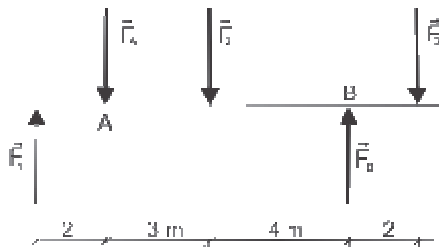


Fig. 68

Zgjidhje:

$$F_A = 5{,}143kN$$

$$F_B = 15{,}143kN.$$

Shembulli 33. *Në mënyrë grafike dhe analitike Të caktohen forcat* $\vec{F}_A$ *dhe* $\vec{F}_B$ *të cilat e barazojnë sistemin e dhënë të forcave* (fig. 69), *nëse janë:*

$$F_1 = 52kN; F_2 = 84kN; F_3 = 66kN; F_4 = 73kN.$$

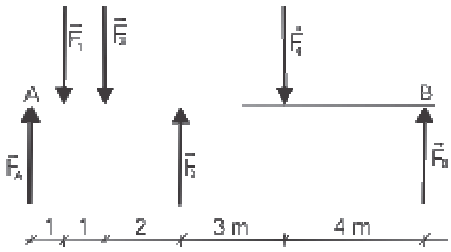


Fig. 69

Zgjidhje:

$F_A = 100,55kN$

$F_B = 42,45kN$.

4. RËNDIMI

Trupi material mund të mendohet se është përbërë nga grimcat elementare me masa m_1, m_2.....m_n në të cilat vepron forca e gravitetit, (fig. 69).

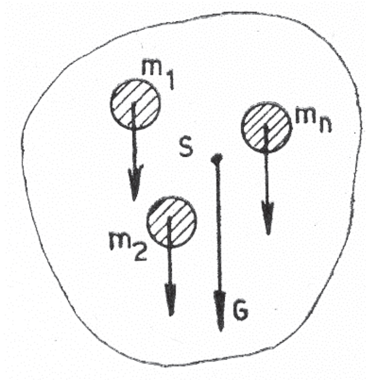


Fig. 69

Prodhimet e masave (m) dhe nxitimi i gravitetit tokësor (g) paraqesin rëndime. Ato janë forca paralele me kahje vertikale teposhtë, kah qendra e Tokës. Rezultantja e atyre forcave paralele paraqet rëndimin e përgjithshëm të trupit material:

$$G = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g + ... + m_n \cdot g$$
$$G = g(m_1 + m_2 + ... + m_n) = M \cdot g$$

G - pesha e trupit
M - masa e përgjithshme e trupit
g - graviteti

Pika rënëse e rezultantes të forcave paralele, të cilat paraqesin rëndime të pjesëve elementare të trupit, quhen **rëndime** *të trupit.*

Çdo vijë e cila kalon nëpër rëndimin quhet vijë e rëndimit. Rëndimi mund të caktohet me prerje të vetëm dy vijave të rëndimit.

Nëse një trup material e vendosim në rëndim, ai do të mbetet në qetësi në çdo pozitë (baraspeshë indiferente). Të gjitha këto konkluzione kanë të bëjnë me trupat homogjenë (trupat të cilët në tërë vëllimin kanë masë të barabartë specifike).

Mënyrë më e thjeshtë për caktimin e rëndimit është sipas metodës së eksperimentit: një pika homogjene materiale të varet në mënyrë alternative në dy pika dhe të lihet që lirisht të varet, (fig. 70). Në të dy rastet të shënojmë vija vertikale nëpër pikat për të cilat trupi është varur. Prerja e këtyre dy vijave e paraqet rëndimin, kurse këto vija i quajmë vija të rëndimit.

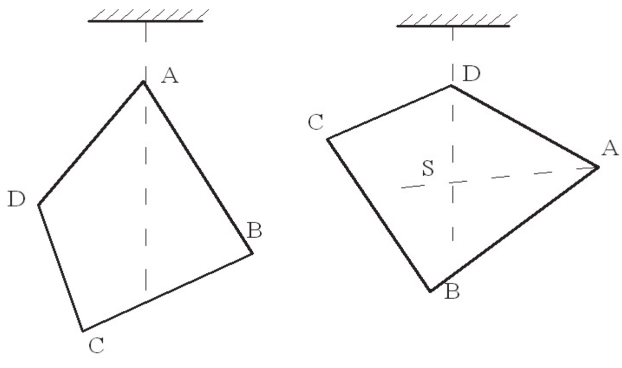


Fig. 70

Në statikë rëndimi mund të caktohet sipas metodës *analitike dhe grafike.* Të dy metodat bazohen sipas procedurës së përmendur eksperimentale, kurse trupin nuk e rrotullojmë, por supozojmë se forcat e gravitetit veprojnë në dy drejtime të ndryshme, zakonisht midis tyre normale. Ne do të ndalemi në metodën analitike.

Këtu do ta njohim caktimin e rëndimit të vijave ose syprinave materiale.

4.1 RËNDİMİ İ VİJAVE MATERİALE

Vija materiale është trup në të cilin të dy dimensionet (gjerësia dhe lartësia) janë mjaft të vogla në krahasim me dimensionin e tretë (gjatësinë). Vijë më e thjeshtë materiale është segmenti. Rëndimi i segmentit është në mesin e tij. Nëse e varim vijën materiale *AB* në pikën *S*, ajo do të jetë në baraspeshë.

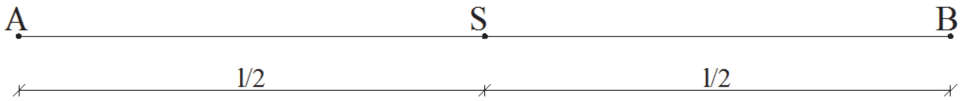


Fig. 71

Rëndimi i vijës së përbërë mund të caktohet sipas metodës analitike dhe grafike. Procedura gjatë caktimit të rëndimit të vijës së përbërë bëhet në ndarjen e saj në pjesë përbërëse për të cilat dihet rëndimi. Sipas metodës grafike, rëndimi i vijës së përbërë caktohet me ndihmën e planit të forcave dhe poligonit vargor.

Sipas metodës analitike, rëndimi caktohet me zbatimin e rregullës momentale. Në fig. 71 është paraqitur vija e përbërë materiale për të cilën duhet të caktohet rëndimi sipas metodës analitike. E përdorim sistemin koordinativ dhe i caktojmë koordinatat e rëndimeve S_1 dhe S_2. Gjatësitë e segmenteve të dhëna i paramendojmë si forca të cilat veprojnë në pikat e mesme të segmenteve, respektivisht në rëndimet S_1 dhe S_2. E vendosim barazimin momental në raport me pikën *O* (sipas teoremës së Varinjonit), prandaj do të jetë:

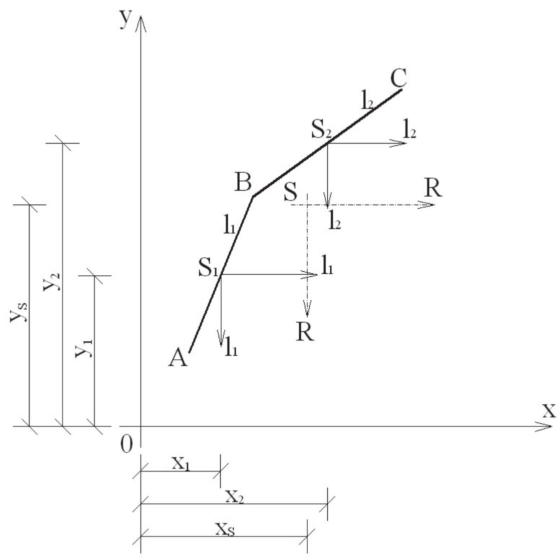


Fig. 72

$$R \cdot x_S = l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 \,; \quad R = l_1 + l_2$$

$$x_S = \frac{l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2}{l_1 + l_2}$$

$$y_S = \frac{l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2}{l_1 + l_2}$$

Për vijat e përbëra me shumë segmente elementare procedura për caktimin e rëndimit është e njëjtë, prandaj barazimi për caktimin analitik të koordinatave të rëndimit mund të shkruhet më formulë të përgjithshme të shkurtuar:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} l_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} l_i} \,; \quad y_S = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} l_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} l_i}$$

4.2 RËNDİMİ İ SYPRİNAVE MATERİALE

Syprina materiale është trup në të cilin njëri dimension (lartësia) është shumë më i vogël në krahasim me dy dimensionet e tjera (gjatësinë dhe gjerësinë).

Syprinat i konsiderojmë si forca fiktive, paralele midis tyre, prandaj e kërkojmë pikën rënëse të rezultantes së forcave paralele.

Së pari caktohet rëndimi e syprinave të drejta gjeometrike të cilat kanë më pak se dy boshte të simetrisë. Prerja e atyre boshteve përputhet me rëndimin e tyre (fig. 74).

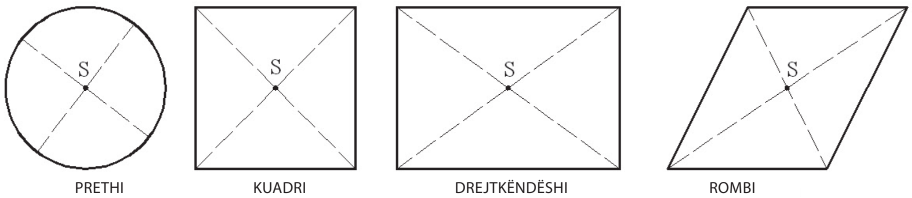
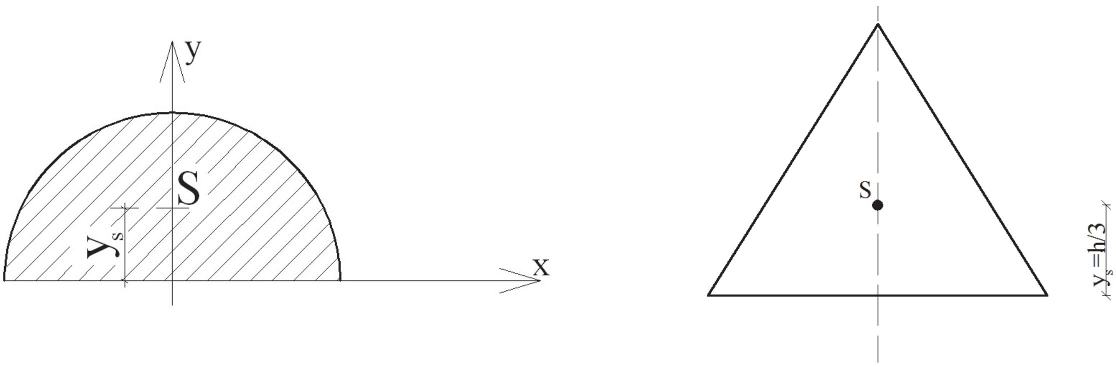


Fig. 73



$$y_S = \frac{4R}{3\pi} \qquad\qquad y_s = \frac{h}{3}$$

Fig. 74

Sipas metodës analitike rëndimi i syprinës materiale caktohet me zbatimin e rregullës momentale. Për atë qëllim e përdorim sistemin koordinativ dhe i caktojmë rëndimet e syprinave të caktuara. E vendosim barazimin momental në krahasim me fillimin koordinativ “0” (sipas teoremës së Varinjonit).

Syprinat e përbëra ndahen në syprina të thjeshta, rëndimet e të cilave caktohen lehtë. Këto syprina të thjeshta i konsiderojmë si forca fiktive dhe e kërkojmë pikën rënëse të rezultantes së forcave paralele.

Për syprinat me një bosht të simetrisë rëndimi patjetër duhet të shtrihet në boshtin e simetrisë.

SHEMBUJ TË ZGJIDHUR

Shembulli nr. 34 Në mënyrë analitike të caktohet rëndimi i syprinës së dhënë të përbërë (fig. 75)

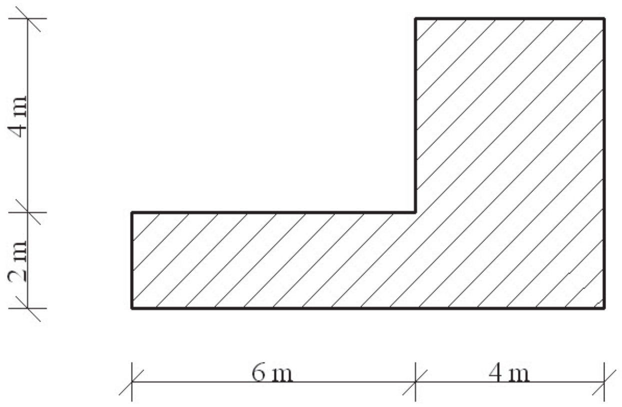


Fig. 75

Zgjidhje:

$$x_S = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2}$$

$$y_S = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2}$$

Sipas fig. 75 dhe sistemit të vendosur koordinativ do të jetë:

$A_1 = 2 \cdot 6 = 12m^2$; $x_1 = 3m$; $y_1 = 1m$

$A_2 = 4(2+4) = 24m^2$; $x_2 = 6+2 = 8m$; $y_1 = \frac{2+4}{2} = 3m$

$$x_S = \frac{12 \cdot 3 + 24 \cdot 8}{12+24} = 6{,}33m$$

$$S(6{,}33; 2{,}33)$$

$$y_S = \frac{12 \cdot 1 + 24 \cdot 3}{12+24} = 2{,}33m$$

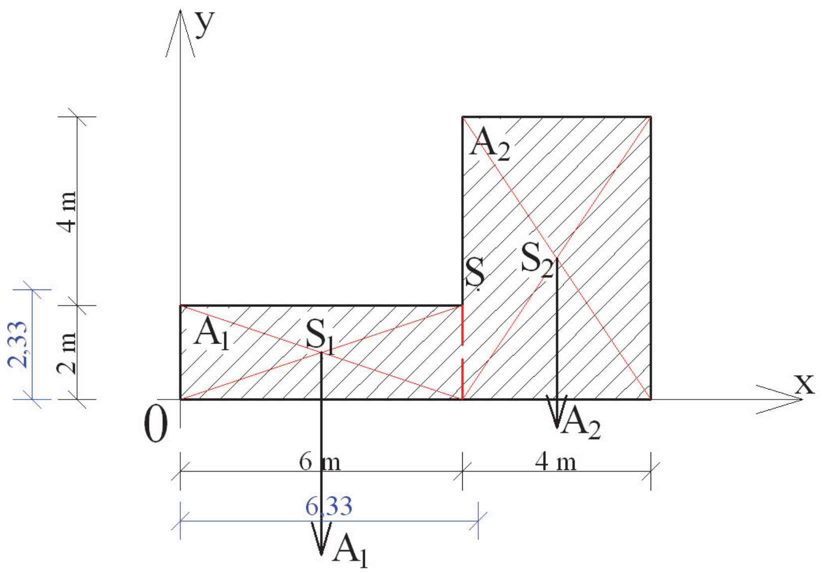


Fig. 76

Shembulli nr. 35: Në mënyrë analitike të caktohet rëndimi i syprinës së dhënë të përbërë (fig. 77)

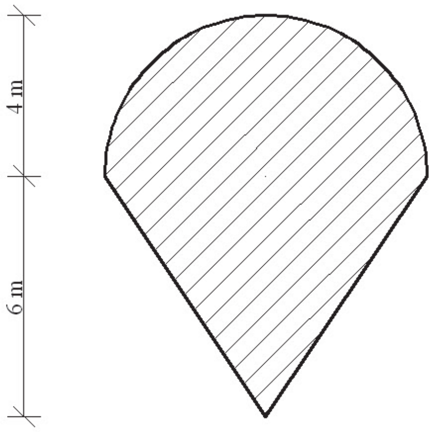


Fig. 77

Zgjidhje:

Kur duhet të caktohet rëndimi i syprinës simetrike në raport me një nga boshtet koordinative, duhet kërkuar vetëm njërën nga koordinatat, sepse koordinata e dytë përputhet me boshtin e simetrisë. Në shembullin tonë boshti i simetrisë të syprinës së dhënë me *y*-boshtin e sistemit koordinativ, që do të thotë se nuk duhet të caktohet x_s, sepse është $x_s = 0$.

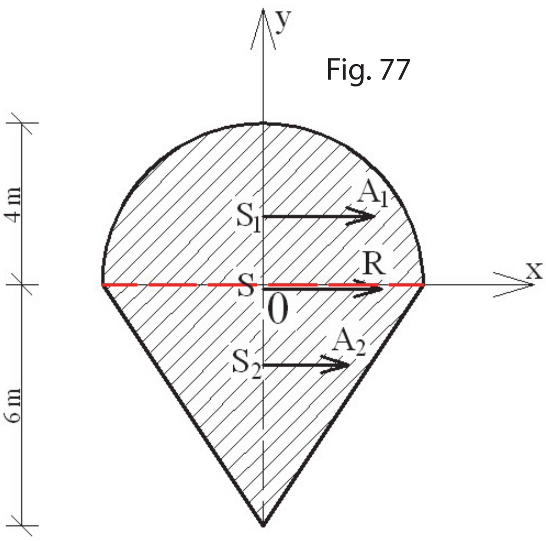


Fig. 78

$$A_1 = \frac{R^2 \cdot \pi}{2} = \frac{4^2 \cdot \pi}{2} = 25{,}1327 m^2$$

$$y_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot \pi} = 1{,}69765 m$$

$$A_2 = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 m^2$$

$$y_2 = -\frac{6}{3} = -2m$$

$$y_S = \frac{25{,}1327 \cdot 1{,}69765 + 24 \cdot (-2)}{25{,}1327 + 24}$$

$$y_S = -0{,}10856 m; \qquad x_S = 0$$

Shembulli nr. 36: Në mënyrë analitike të caktohet rëndimi i syprinës së dhënë të përbërë (fig. 79)

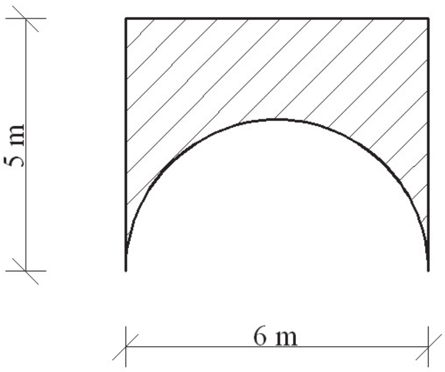
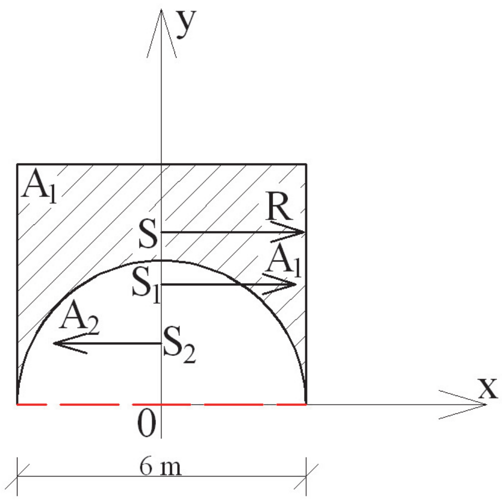


Fig. 79

Zgjidhje:

Sipërfaqet e përbëra të rrafshëta, të cilave u janë hiqen disa pjesë, mund të trajtohen si syprina të dobësuara. Në këtë rast gjatë caktimit të rëndimit pjesët e hequra trajtohen si forca të cilat kanë kahje të kundërt nga të tjerat.

Sipas Fig. 80 dhe sistemit të vendosur koordinativ, do të jetë:



$$A_1 = 6 \cdot 5 = 30m^2;\ \ y_1 = 2{,}5m$$

$$A_2 = \frac{R^2 \cdot \pi}{2} = \frac{3^2 \cdot \pi}{2} = 14{,}137m^2;$$

$$y_2 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 3}{3\pi} = 1{,}273m$$

$$y_S = \frac{30 \cdot 2{,}5 - 14{,}137 \cdot 1{,}273}{30 - 14{,}137} = 3{,}5935m$$

$$S(0;3{,}5935)$$

Fig. 80

Shembulli nr. 37: Në mënyrë analitike të caktohet rëndimi i syprinës së dhënë të përbërë (fig. 81)

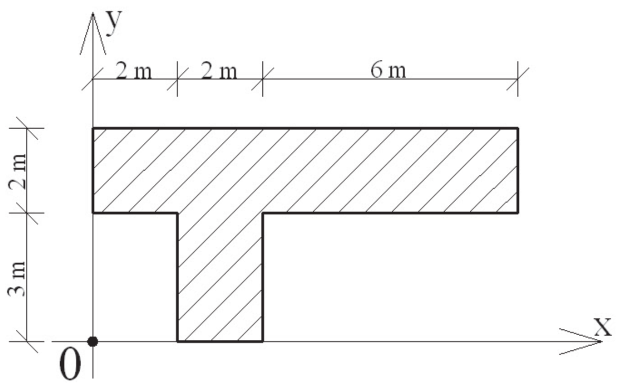


Fig. 81

Zgjidhje:

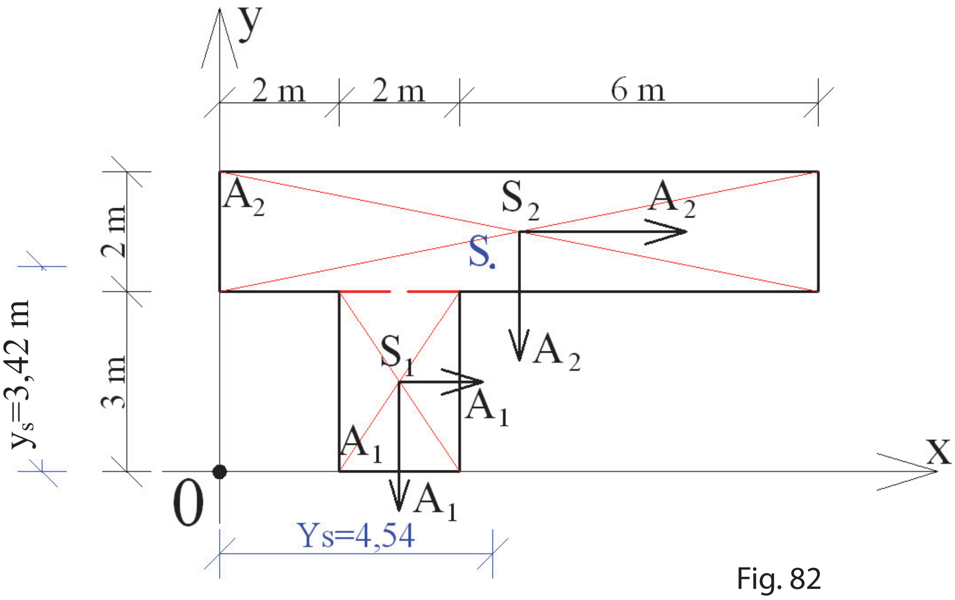


Fig. 82

$$A_1 = 2 \cdot 3 = 6m^2; \qquad y_1 = 1{,}5m; \qquad x_1 = 3{,}0m$$
$$A_2 = 10 \cdot 2 = 20m^2; \qquad y_2 = 4{,}0m; \qquad x_2 = 5{,}0m$$

$$x_S = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{6 \cdot 3 + 20 \cdot 5}{6 + 20} = 4{,}54m$$
$$y_S = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{6 \cdot 1{,}5 + 20 \cdot 4{,}0}{6 + 20} = 3{,}42m$$

$S\,(4{,}54;\ 3{,}42)$

Shembulli nr. 38: Në mënyrë analitike të caktohet rëndimi i syprinës së dhënë të përbërë (fig. 83)

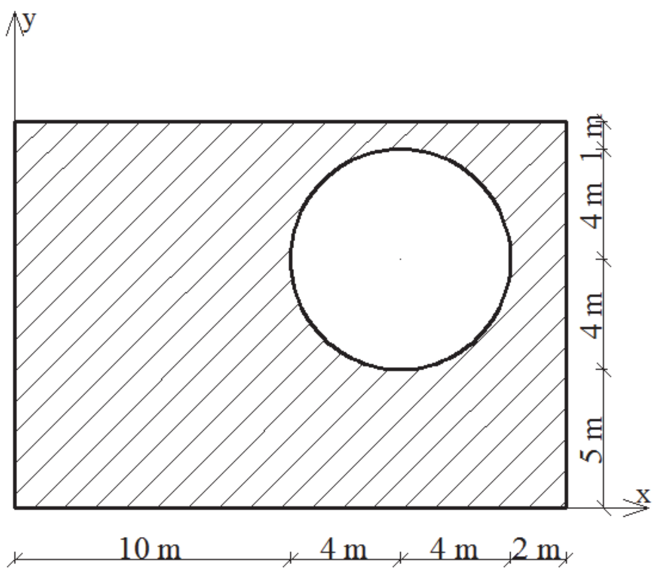


Fig. 83

Zgjidhje:

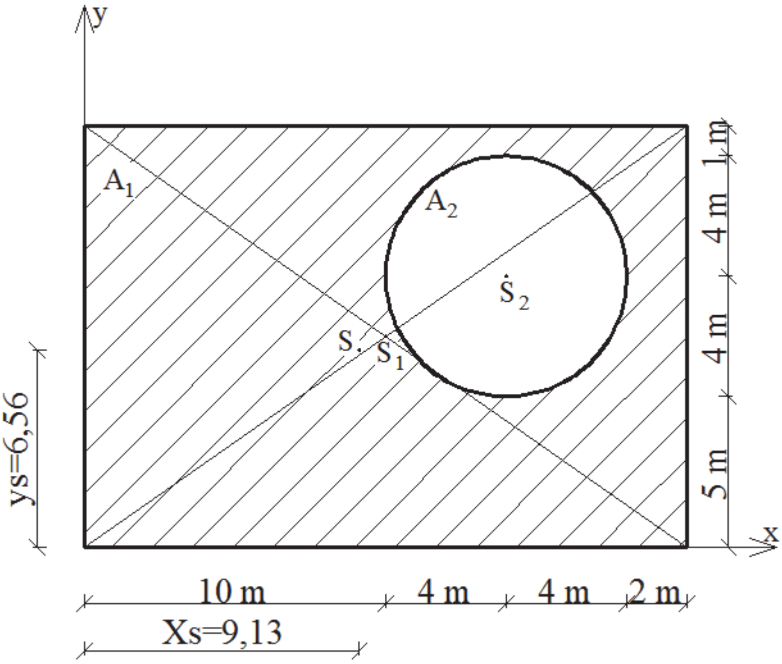


Fig. 84

$$A_1 = 20 \cdot 14 = 280m^2; \qquad x_1 = 10{,}0m; \quad y_1 = 7{,}0m$$

$$A_2 = R^2 \cdot \pi = 4^2 \cdot \pi = 50{,}24m^2; x_2 = 14{,}0m; \quad y_2 = 9{,}0m$$

$$x_S = \frac{A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2}{A_1 - A_2} = \frac{280 \cdot 10 - 50{,}24 \cdot 14}{280 - 50{,}24} = 9{,}13m$$

$$y_S = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2} = \frac{280 \cdot 7 - 50{,}24 \cdot 9}{280 - 50{,}24} = 6{,}56m$$

DETYRA PËR USHTRIM

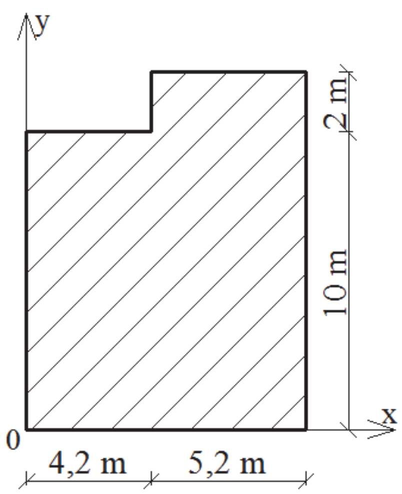


Fig. 85

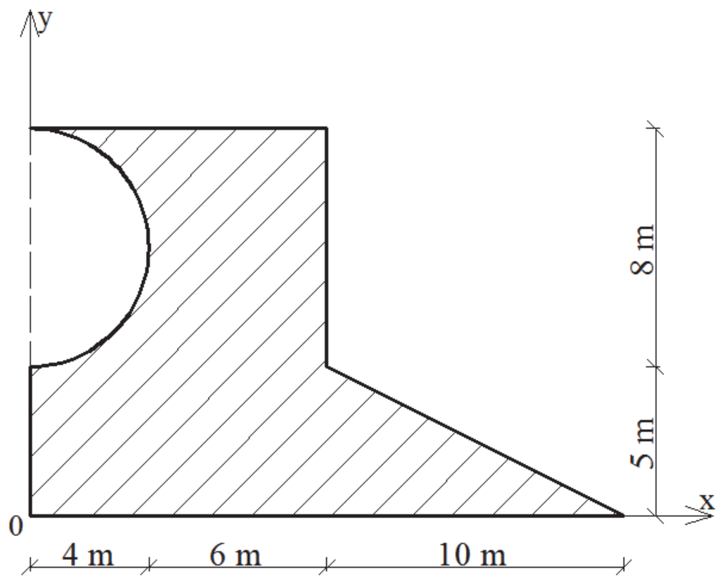


Fig. 86

Zgjidhje:

Për detyrën nga fig. 85

x_s — 4,08 m

y_s — 5,06 m

Për detyrën nga fig. 86

x_s — 5,31

y_s — 5,09 m

Mbaj mend:

Rëndimi është pika në të cilën është koncentruar e tërë pesha e një trupi material. Mund të caktohet në mënyrë analitike dhe grafike.

Pyetje për vetëvlerësim:

1. Definoni rëndimin!
2. Për cilat syprina themi se janë të përbëra?
3. Sa metoda mund të përdorim për zhvendosjen e rëndimit?

5. MBAJTËSİT E PLOTË TË RRAFSHËT

Objektet e ndërtimtarisë, në kuptimin statik, janë të përbëra prej elementeve konstruktive të cilat pranojnë dhe mbajnë ngarkesa. Këto elemente i quajmë **mbajtës**. Mbajtësit mund të jenë *të rrafshët dhe hapësinorë*. Mbajtësit e rrafshët kanë formë konstruktive e cila bashkë me drejtimet e forcave të cilat veprojnë ndaj saj, shtrihen në një rrafsh, kurse mbajtësi është pllakë e ngurtë mjaft e hollë në rrafsh të njëjtë. Këtu vlen supozimi se pllaka materiale është jo deformabile, respektivisht se është një trup i ngurtë ideal.

Mbajtësit e rrafshët mund të jenë **të plotë dhe në formë të grilës**.

Mbajtësi i plotë i rrafshët është mbajtës, prerja e tërthortë e të cilit është plotësuar me materie e cila merr pjesë në mbajtjen e peshës.

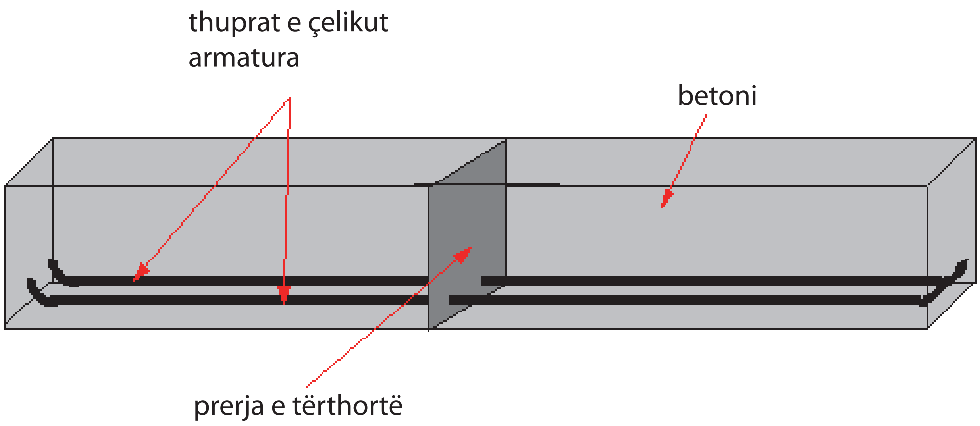


Fig. 87

Mbajtësi në formë të grilës është mbajtës nga shkopinj të cilët midis tyre janë të lidhur ashtu që paraqesin një tërësi (shihni figurën 88)

Fig. 88

Mbajtësit e plotë të rrafshët skematikisht i paraqesim si vijë të drejtë e cila përputhet me boshtin e zgjatur të mbajtësit.

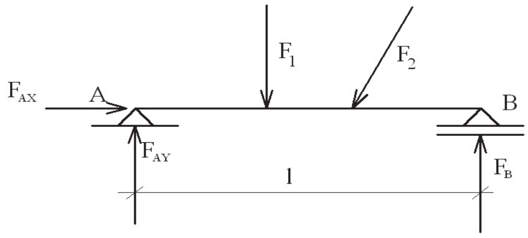


Fig. 89

Pikat takuese midis mbajtësve dhe tokës, të cilat pamundësojnë disa nga lëvizjet komponentale ose plotësisht e pengojë lëvizjen e mbajtësit dhe pjesëve të tij janë: **lidhjet**, **kushinetat** ose **mbështetësit**.

Me mbështetje mbajtësit në kushinetat batin forca, të cilat veprojnë si forca aktive. Në kushineta këto forca aktive shkaktojnë rezistencë, respektivisht reaksione (forca pasive). Forcat aktive dhe pasive janë në baraspeshë, respektivisht kanë drejtim dhe intensitet të njëjtë, por kahje të kundërt. Nga konstruksioni i kushinetës varet çfarë reaksione paraqiten në atë.

5.1 LLOJET E KUSHİNETAVE, MBAJTËSVE, NGARKESAVE DHE FORCAVE TË BRENDSHME

Për llojin e përgjithshëm të ngarkesës, mbajtësi i lirë ka mundësi në lëvizje horizontale, vertikale dhe rrotulluese. Kur me lidhje pamundësohen të gjitha llojet e lëvizjeve, kemi **kushinetë lëvizëse**, (shihni figurën nr. 90).

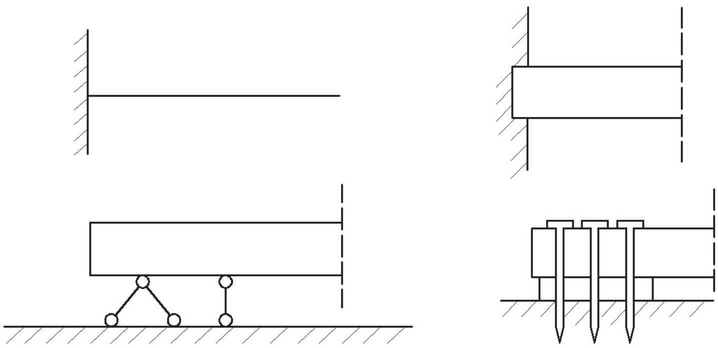
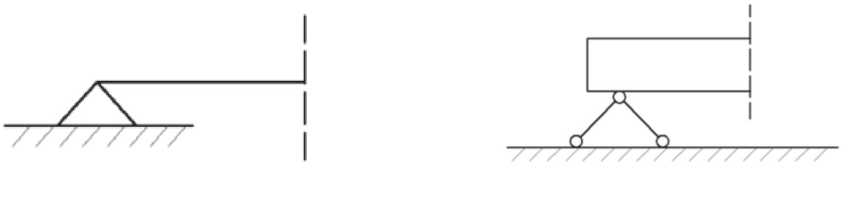


Fig. 90

Kur lidhja pamundëson lëvizjen horizontale dhe vertikale të mbajtësit, por rrotullimi është i mundshëm, **kemi kushinetë** të palëvizshme, (shihni figurën 91).



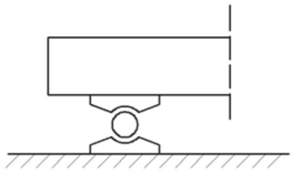


Fig. 91

Kushineta lëvizëse konstruktohet ashtu që të mundësojë zhvendosje të mbajtësit për dhënie të drejtimit (shihni figurën 92). Vetë konstruksioni i kushinetës lëvizëse mund të bëhet me rule cilindrike të cilat mund të lëvizin shpesh në drejtim të boshtit të mbajtësit, pa fërkim.

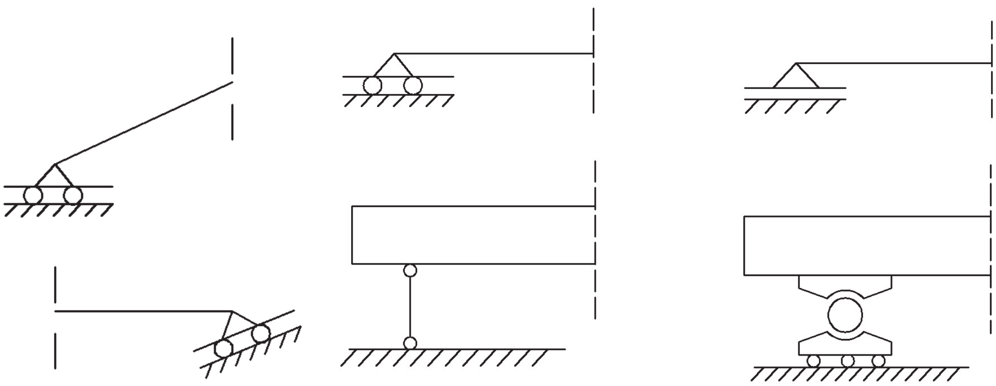


Fig. 92

Nën ndikimin e ngarkesës, në statikë mbajtësi patjetër duhet të jetë në baraspeshë. Kjo do të thotë se ngarkesat dhe reaksionet së bashku e përbëjnë sistemin e forcave të cilat patjetër duhet të jenë në baraspeshë. Reaksionet më të njohura në kushinetë i caktojmë me ndihmën e kushteve të njohura analitike ose grafike për baraspeshë të forcave në rrafsh.

Nga numri dhe lloji i kushinetës, ndaj të cilës është mbështetur një mbajtës, varet edhe numri i reaksioneve të panjohura. Kur te një mbajtës i rrafshët, ndaj të cilit veprojnë forcat e jashtme, mund t'i caktojmë reaksionet e panjohura me ndihmën e të tri kushteve për baraspeshë ($\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M = 0$), themi se ai është mbajtës i jashtëm i **caktuar statik**.

Në praktikë shumë shpesh hasim mbajtës të cilët kanë shumë reaksione të panjohura në kushinetat e veta dhe të njëjtit nuk mund t'i caktojmë vetëm me ndihmë të të tri kushteve për baraspeshë. Ata janë mbajtës të jashtëm të **pacaktuar statikë**. Mbajtësit e tillë zgjidhen me ndihmën e barazimeve të cilat do t'i mësojmë në lëndën *Fortësia e materialeve*, kurse këtu në *Statikë* do t'i analizojmë vetëm mbajtësit e jashtëm të pacaktuar statikë.

Varësisht nga pozita dhe lloji i kushinetave të cilat zbatohen, mbajtësit e plotë të rrafshët mund të jenë: *trari i thjeshtë, trari me një ose dy lëshime, trari i Garberit, konzola dhe korniza*. Të gjithë mbajtësit e përmendur të plotë të rrafshët janë të ashtuquajturit *mbajtës të trarëve*. Ekzistojnë edhe mbajtës të plotë shtrirës, të cilët nuk do t'i mësojmë.

Trari i thjeshtë është tra me dy kushineta prej të cilave njëra është lëvizëse, kurse tjetra është e palëvizshme. Në mënyrë skematike e paraqesim si vijë të drejtë e cila përputhet me boshtin e zgjatur të mbajtësit.

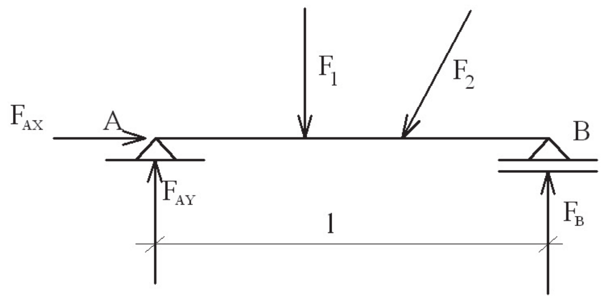


Fig. 93

Mbajtësin e mbështetur në dy kushineta, prej të cilave njëra është e lëvizshme, kurse tjetra është e palëvizshme, skajet e të cilave janë të vazhduara mbi një ose dy mbështetës (kushineta), e quajmë **tra me lëshime**.

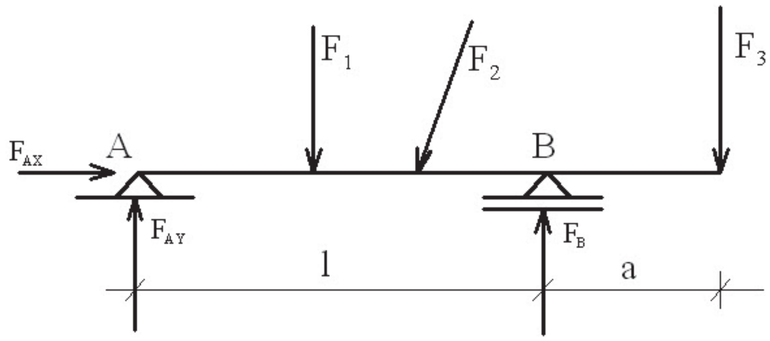


Fig. 94

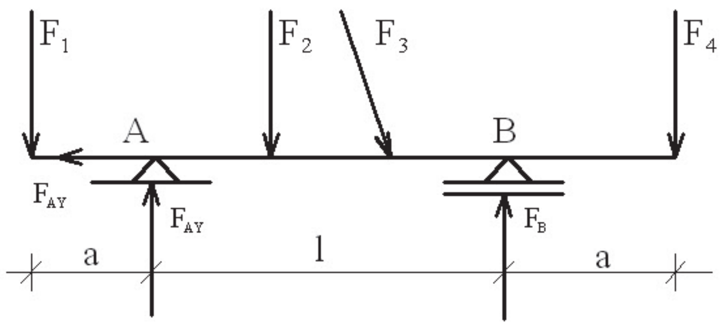


Fig. 95

Mbajtësin e përforcuar për njërin skaj, kurse në tjetrin është i lirë, e quajmë **konzolë**.

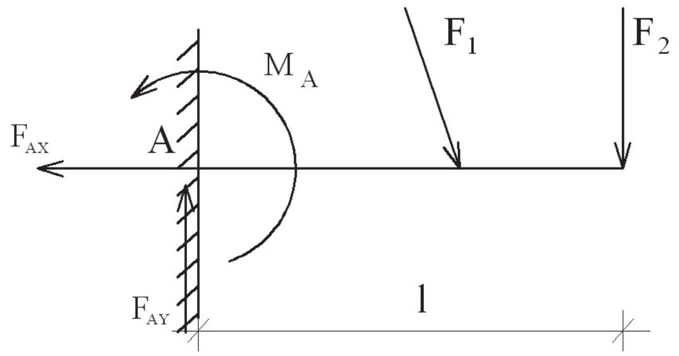


Fig. 96

Trari i përbërë, i cili mund të jetë i përbërë prej trarëve të thjeshtë, trarëve me lëshime dhe konzolave të lidhura midis veti me nyje, quhet **tra i Gerberit**. Dallojmë trarë të Gerberit me dy, tre ose më tepër distanca.

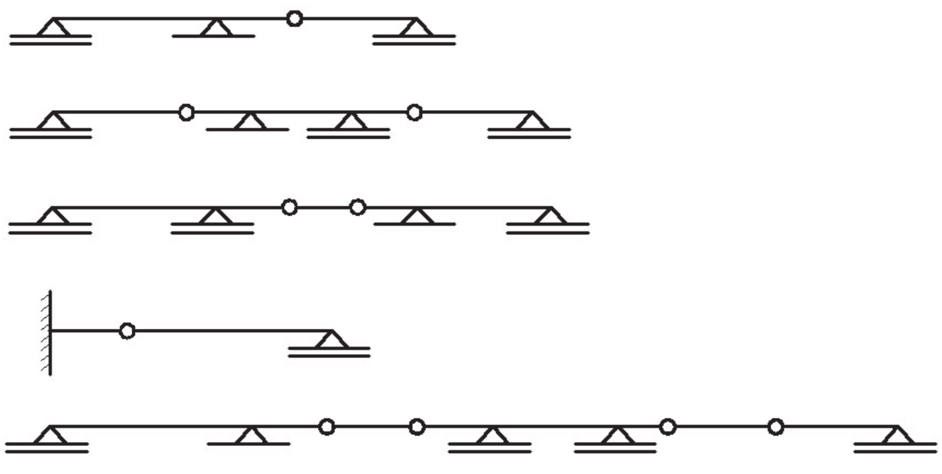


Fig. 97

Detyra kryesore e trarëve është që t'i pranojë dhe t'i përcjellë ngarkesat. Nën ngarkesë nënkuptohen të gjitha llojet e forcave të cilat shkaktojnë reaksione në mbështetësit.

Sipas mënyrës së veprimit, ngarkesa është **përqendruar dhe shpërndarë në mënyrë të barabartë** (të kontinuar). Ngarkesa e përqendruar vepron në një pikë të mbajtësit, shënohet me *F* dhe ka dimensione *N* (njutën). Ngarkesa e barabartë ose e kontinuar vepron nëpër gjatësinë e mbajtësit, shënohet me *q* dhe ka dimensione $^{N}/_{m}$.

Ngarkesa e kontinuar mund të ndahet në mënyrë të barabartë ose jo e barabartë.

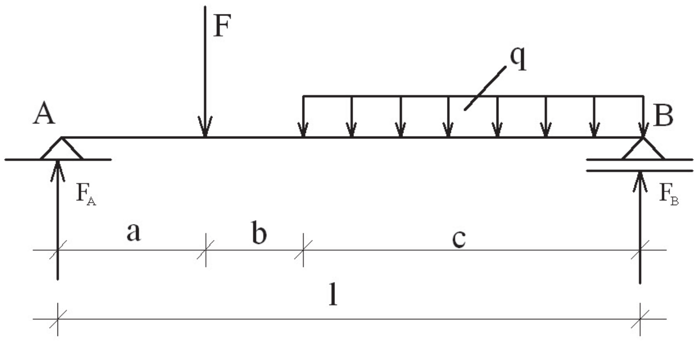


Fig. 98

Kur ngarkesa në një mbajtës ka ndikim në mbajtësin tjetër, themi për mbajtësin tjetër se është ngarkuar në mënyrë ndërmjetësuar. Kur ngarkesa e ndërron pikën e vet rënëse, themi se është lëvizës. Me ngarkesën e ndërmjetësuar dhe lëvizëse nuk do të merremi.

Ngarkesa si forcë e jashtme shkakton reaksione në kushinetën e mbajtësit. Të gjitha këto forca (aksione dhe reaksione) dihet të jenë në baraspeshë. Me vetë bartjen e forcave të jahte në kushinetë, mbajtësi është në gjendje të ngarkuar, d.m.th. në atë paraqiten forcat brendshme. Qëllimi i llogaritjes statike të mbajtësit të vëzhguar është që të bëhet analiza e të gjitha ngarkesave të cilat janë shkaktuar nga forcat e jashtme (në këtë term hyjnë edhe reaksionet) dhe të kontrollohet a janë në kufij të lejimit, që të vërehet stabiliteti i konstruksionit. Për llogaritje të këtyre ngarkesave (të cilat do t'i njohim në lëndën *Fortësia e materialeve*), është e domosdoshme t'i dimë forcat e brendshme në mbajtësin e ngarkuar.

Për kuptim më të lehtë të nocionit dhe llojit të forcave të brendshme, vëzhgojmë një mbajtës të paramenduar, me prerje të paramenduar *I - I*.

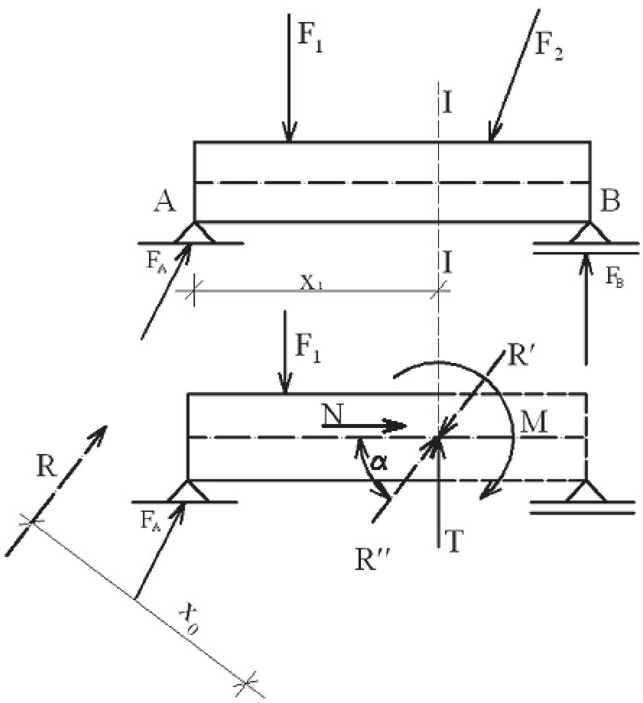


Fig. 99

Prerja I - I është në distancën x nga mbështetësi (kushineta) A. Ngase mbajtësi është si tërësi në baraspeshë, çdo pjesë e tij patjetër duhet të jetë në baraspeshë. E largojmë pjesën e djathtë nga prerja e mbajtësit dhe e vëzhgojmë baraspeshën e pjesës së majtë. Forcën F_1 dhe reaksionin F_A i dakordojmë në rezultanten R në distancën x_0 (ajo është rezultantja e forcave të jashtme të cilat veprojnë në pjesën e majtë të mbajtësit). Në prerjen I - I shtojmë dy forca të barabarta R' dhe R'' me kahje të kundërt, kurse me madhësi dhe drejtim si në R, me çka nuk ndërrohet baraspesha (aksioma e gjashtë). Rezultantja R dhe forca R' shkaktojnë bashkim në prerjen I - I me intensitet:

$$M = R \ x_0$$

Në prerjen mbetet edhe forca R'' të cilën e zbërthejmë në komponentët

T dhe N

Komponenti horizontal nga forca R'' është N : $(R'' = R)$

$$N = R \cdot cos\alpha$$

Komponenti vertikal nga forca R'' është T:

$$T = R \cdot sin\alpha$$

Këto tri ndikime të rezultantes R në prerjen I - I posaçërisht më detalisht do t'i njohim. Shprehja (26) paraqet moment statik të rezultantes në prerjen I - I, kurse e quajmë **moment rënës**. Momentin rënës e konsiderojmë se është pozitiv (+) nëse me ndikimin e vet i shtrin fijet e veta të mbajtësit, kurse të poshtmet i shtyp (fig. 99). Kur vepron në të kundërtën, fijet e poshtme të mbajtësit i shtyp, kurse të sipërmet i shtrin, konsiderojmë se ka kahje negative (-).

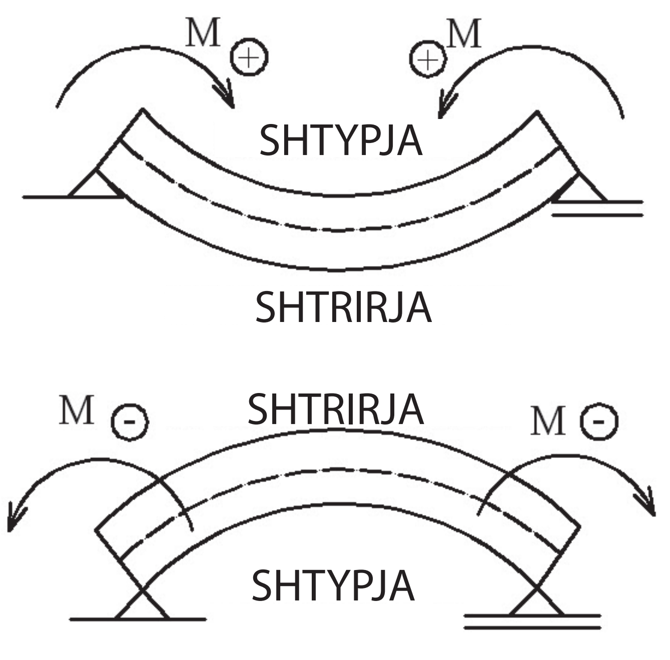


Fig. 100

Nga kjo më lart mund të thuhet edhe me fjalë të tjera, edhe atë: momenti është pozitiv nëse i njëjti rrotullohet në raport me prerjen në kahje të akrepave të orës, nëse forca është në të majtë të prerjes, respektivisht negativ nëse rrotullohet në të kundërtën e akrepave e orës, kur forca është në të djathtë të prerjes.

Definicioni për momentin rënës thotë:

Momenti rënës në prerje të paramenduar të trarit është i barabartë me shumën gjeometrike të momenteve statike të të gjitha forcave të majta (ose të djathta) nga prerja e vëzhguar, në raport me rëndimin e prerjes së njëjtë, si pikë momentale.

Shprehja (27) paraqet **forcë aksiale** e cila vepron në drejtim të boshtit të mbajtësit, respektivisht është normale me prerjen e vëzhguar tërthore. Në raport të pjesës së mbajtësit të cilin e vëzhgojmë, kjo forcë mund të veprojë si shtypje ose shtrirje (fig. 102). Kur forca normale vepron në kahje nga jashtë prerjes, shkakton shtrëngim dhe konsiderojmë se ka kahje pozitive. Kur forca normale vepron ndaj prerjes, shkakton shtypje dhe konsiderojmë se është negative.

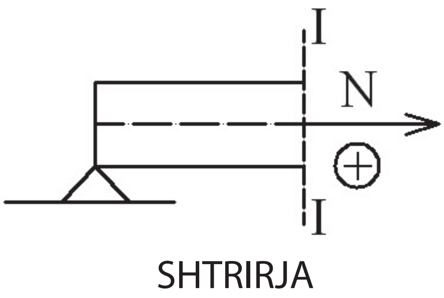


Fig. 101

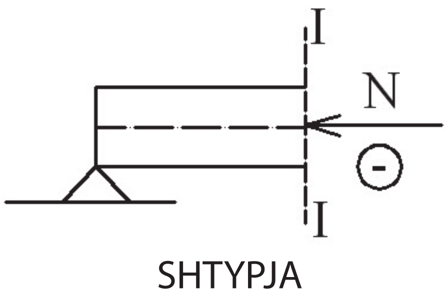


Fig. 102

Definicioni për forcën aksiale thotë:

Forca aksiale në prerje të paramenduar të mbajtësit të vëzhguar është e barabartë me shumën algjebrike të të gjitha forcave të jashtme, majtas (ose djathtas) nga prerja, të cilat veprojnë në drejtim të boshtit të mbajtësit.

Shprehja (28) paraqet **forcë të tërthortë ose transversale** e cila vepron nën kënd të drejtë me boshtin e mbajtësit. Forca transversale nuk ka kahje pozitive kur pjesa e majtë e mbajtësit deri te prerja e vëzhguar e paramenduar teton të zhvendoset lart, kurse e majta poshtë (fig. 103). Kur forca transversale tenton që pjesën e mbajtësit djathtas nga prerja ta zhvendosë lart, kurse majtas poshtë, ka parashenjë negative.

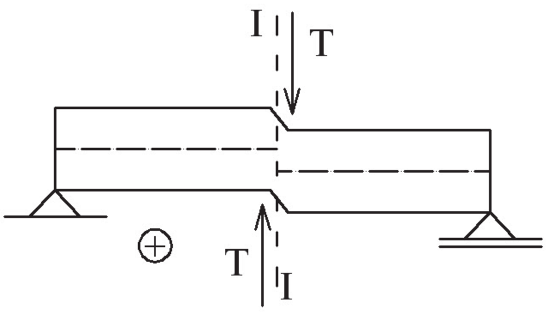


Fig. 103

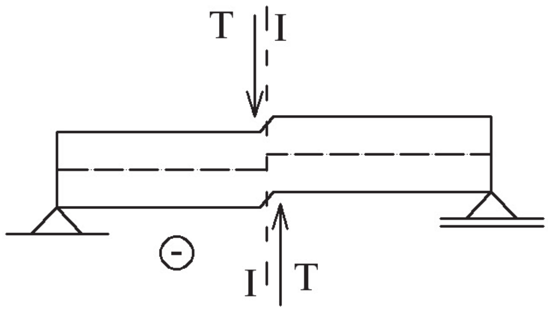


Fig. 104

Definicioni për forcën transversale thotë:

Forca transversale në prerje të paramenduar të mbajtësit të vëzhguar është e barabartë me shumën algjebrike të të gjitha forcave normale me boshti e mbajtësit, majtas (ose djathtas) nga prerja.

Në bazë të këtyre definicioneve për momentin rënës, forcat aksiale dhe transversale, jemi në mundësi t'i caktojmë ato madhësi statike për prerje të ndryshme të mbajtësit të vëzhguar. Prerjet i përvetësojmë në pikat karakteristike dhe madhësitë e fituara statike dhe në shkallë të përshtatur i llogarisim grafikisht. Me lidhjen e të gjitha pikave, fitojmë pasqyrë grafike të ndryshores së madhësive statike nëpër gjatësinë e mbajtësit. Ato janë diagrame statike. Mund të caktohen sipas mënyrës analitike dhe grafike. Ne do të ndalemi në caktimin analitik edhe atë për lloje të ndryshme të mbajtësve.

Mbaj mend:

Mbajtës i plotë i rrafshët është mbajtësi tek i cili çdo prerje e tij e tërthortë është plotësuar me materie e cila merr pjesë në mbajtjen e ngarkesave.

Gjatë llojit të përgjithshëm të ngarkesës, mbajtësi i rrafshët ka mundësi për lëvizje horizontale, vertikale dhe rrotulluese.

Lidhja e mbajtësit me elemente të tjera mund të realizohet nëpërmjet kushinetës së kufizuar, të palëvizshme dhe të lëvizshme.

Ngarkesat të cilat veprojnë te mbajtësit mund të jenë: të përqendruara (veprojnë në një pikë) dhe të shpërndara në mënyrë të barabartë, ngarkesë e kontinuar (vepron në gjatësi të madhe të mbajtësit).

Varësisht nga pozita dhe lloji i kushinetave të cilat zbatohen, mbajtësit e plotë të rrafshët mund të jenë:

- tra i thjeshtë;
- tra me një ose dy lëshime;
- tra konzoli;
- tra i Gerberit.

Detyra për vetëvlerësim:

1. Cilët mbajtës i quajmë mbajtës të rrafshët?
2. Si mund të jetë veprimi i ngarkesës së jashtme?
3. Për cilën kushinetë themi se është kufizuar?
4. Sa shkallë të lirë ka kushineta e lëvizshme?
5. Sipas llojit të shtrirjes si mund të jenë mbajtësit e poshtëm të rrafshët?

6. LLOJET E MBAJTËSVE

6.1 TRARİ İ THJESHTË

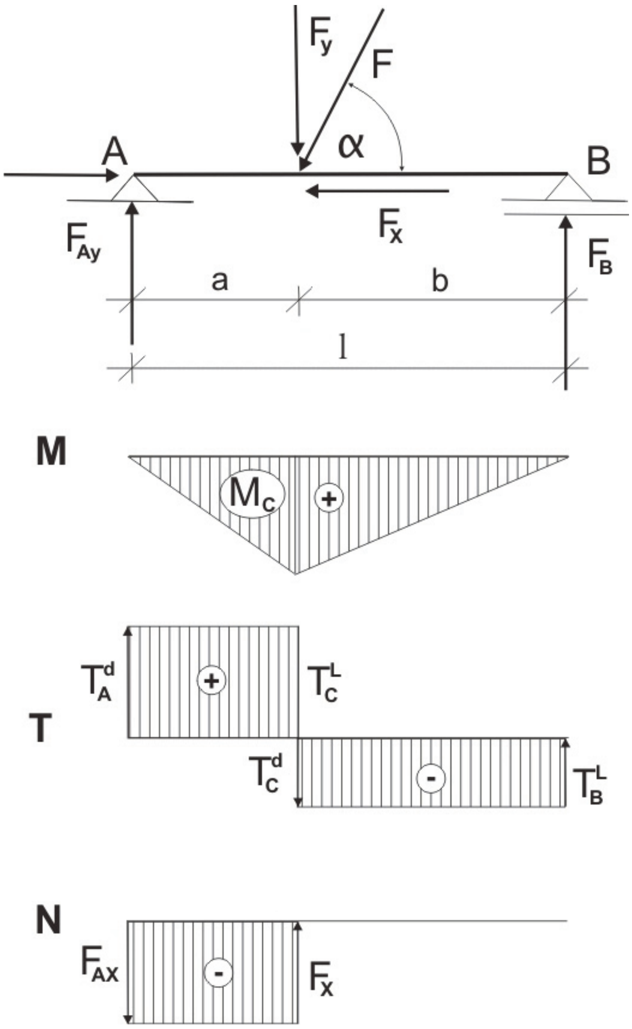


Fig. 105

Trari thjeshtë paraqet mbajtës të caktuar statik i cili shtrihet në një kushinetë të palëvizshme dhe të lëvizshme. Reaksionet dhe madhësitë statike (momentet, lëvizjet transversalet dhe aksiale) i caktojmë në mënyrë analitike për lloje të ndryshme të ngarkesave.

Trari i thjeshtë i ngarkuar me ngarkesë të përqendruar

Metoda analitike:

Kjo metodë i shfrytëzon të tri kushtet analitike për baraspeshë.

Nëse një ngarkesë e jashtme është forcë e pjerrët e përqëndruar $\vec{F}$, të njëjtën së pari e zbërthejmë në komponentët e saj (F_y dhe F_x).

Pastaj caktohen reaksionet $\vec{F}_A$ dhe $\vec{F}_B$, nga kushti $\sum M_A = 0$ dhe $\sum M_B = 0$

Konzola e saktësisë për rezultatet e fituara të komponentëve vertikalë të reaksioneve bëhet me kushtin $\sum Y = 0$.

Komponenti horizontal i forcës $\vec{F}$ paraqet reaksion horizontal në kushinetën e palëvizshme. Ky reaksion caktohet nga kushti $\sum X = 0$

Në bazë të definicioneve për momentin rënës, forcave transversale dhe aksiale, i caktojmë madhësitë statike në prerjet karakteristike. Këto prerje karakteristike janë kushineta dhe pikat në të cilat veprojnë forcat e jashtme.

Lidhjet e tilla të caktuara të momentit, forcat transversale dhe aksiale në prerjet karakteristike, i sjellim në shkallë të volitshme në vijat paralele me boshtin e mbajtësit. Me lidhjen e vlerave të sjella, fitojmë diagrame statike.

Duke i analizuar këto diagrame statike, mund të konkludojmë:

Për diagramin e momentit:

- diagrami i momentit ka forma poligonale me thyerje të pikës ku vepron forca e përqendruar;
- ka parashenjë pozitive nëpër tërë gjatësinë e trarit të thjeshtë, kur ngarkesa vepron teposhtë;
- vlera më e madhe është në prerjen ku forca transversale e ndërron parashenjën;
- "+" vizatohet poshtë; - "-" vizatohet lart;

Për diagramin e forcave transversale:

- diagrami ka forma shkallore;
- vlerat e forcës transversale ndërrohen në pikat në të cilat veprojnë forcat e përqendruara edhe atë në kërcime;
- në prerjen nën forcë F diagrami e ndërron shenjën;
- diagrami është i mbyllur, sepse të gjitha forcat vertikale janë në baraspeshë;

"+" vizatohet poshtë; **"-"** vizatohet lart;

Për diagramin e forcave aksiale:

- forcat aksiale të cilat shkaktojë shtypje në mbajtës, janë me parashenjë negative dhe vizatohen nën boshtin e mbajtësit;
- forcat aksiale të cilat shkaktojnë tërheqje në mbajtës, janë me parashenjë pozitive dhe vizatohen mbi boshtin e mbajtësit;

Mbaj mend: **Trari i thjeshtë paraqet mbajtës të caktuar statik i cili hyn në një kushinetë të palëvizshme dhe një të lëvizshme.**

Shembulli nr. 39: Në mënyrë analitike të caktohen reaksionet dhe madhësitë statike për ngarkesën e dhënë të trarit të thjeshtë (fig. 106)

$F_1 = 20\text{kN}$

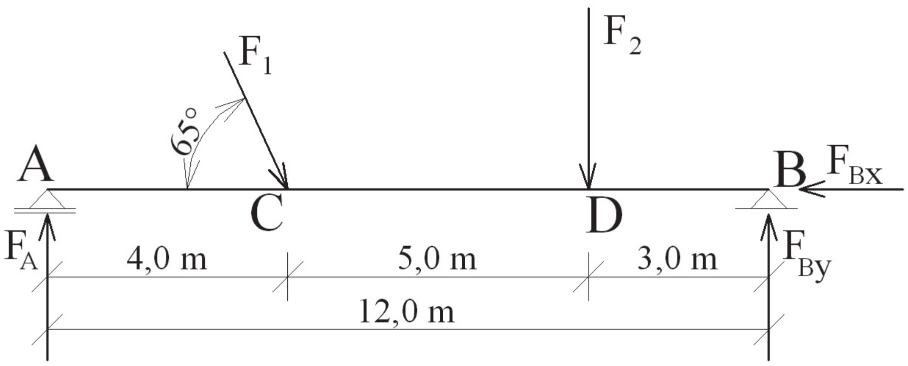


Fig. 106

Zgjidhje:
Analitike:

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha = 20 \cdot \sin 65^\circ = 20 \cdot 0{,}9063 = 18{,}126\,kN$$
$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha = 20 \cdot \cos 65^\circ = 20 \cdot 0{,}4226 = 8{,}452\,kN$$

1. Caktimi i reaksioneve

$$\sum M_A = 0$$
$$F_{1y} \cdot 4 + F_2 \cdot 9 - F_{By} \cdot 12 = 0$$
$$18{,}126 \cdot 4 + 30 \cdot 9 - F_{By} \cdot 12 = 0$$
$$F_{By} = \frac{72{,}504 + 270}{12} = \frac{342{,}504}{12} = 28{,}542\,kN$$
$$\sum M_B = 0$$
$$F_A \cdot 12 - F_{1y} \cdot 8 - F_2 \cdot 3 = 0$$
$$F_A \cdot 12 - 18{,}126 \cdot 8 - 30 \cdot 3 = 0$$
$$F_A = \frac{145{,}008 + 90}{12} = \frac{235{,}008}{12} = 19.584\,kN$$

Kontrolli: $\sum Y = 0$
$$F_A - F_{1y} - F_2 + F_{By} = 0$$
$$19{,}584 - 18{,}126 - 30 + 28{,}542 = 48{,}126 - 48{,}126 = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$F_{1X} - F_{BX} = 0 \quad ; \qquad F_{BX} = F_{1X} = 8{,}452\,kN$$
$$F_B = \sqrt{F_{BX}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{8{,}452^2 + 28{,}542^2} = 29{,}767\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{By}}{F_{Bx}} = \frac{28{,}542}{8{,}452} = 3{,}3769\,; \qquad \varphi = 73^\circ$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_A = 0$$
$$M_C = F_A \cdot 4 = 19{,}584 \cdot 4 = 78{,}336\,kN \cdot m$$
$$M_D = F_A \cdot 9 - F_{1y} \cdot 5 = 19{,}584 \cdot 9 - 18{,}126 \cdot 5 = 85{,}626\,kN \cdot m$$
$$M_B = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_A = 19{,}584\,kN$$
$$T_C^l = F_A = 19{,}584\,kN$$
$$T_C^d = F_A - F_{1y} = 19{,}584 - 18{,}126 = 1{,}458\,kN$$
$$T_D^l = F_A - F_{1y} = 19{,}584 - 18{,}126 = 1{,}458\,kN$$
$$T_D^d = F_A - F_{1y} - F_2 = 19{,}584 - 18{,}126 - 30 = -28{,}542\,kN$$
$$T_B^l = T_D^d = -28{,}542\,kN$$
$$T_B^d = 0$$

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{C-B} = -F_{1x} = -8{,}452\,kN$$
$$N_B{}^L = -F_{1x} = -8{,}452 kN$$
$$N_B{}^D = -F_{1x} + F_{Bx} = -8{,}452 + 8{,}542 = 0$$

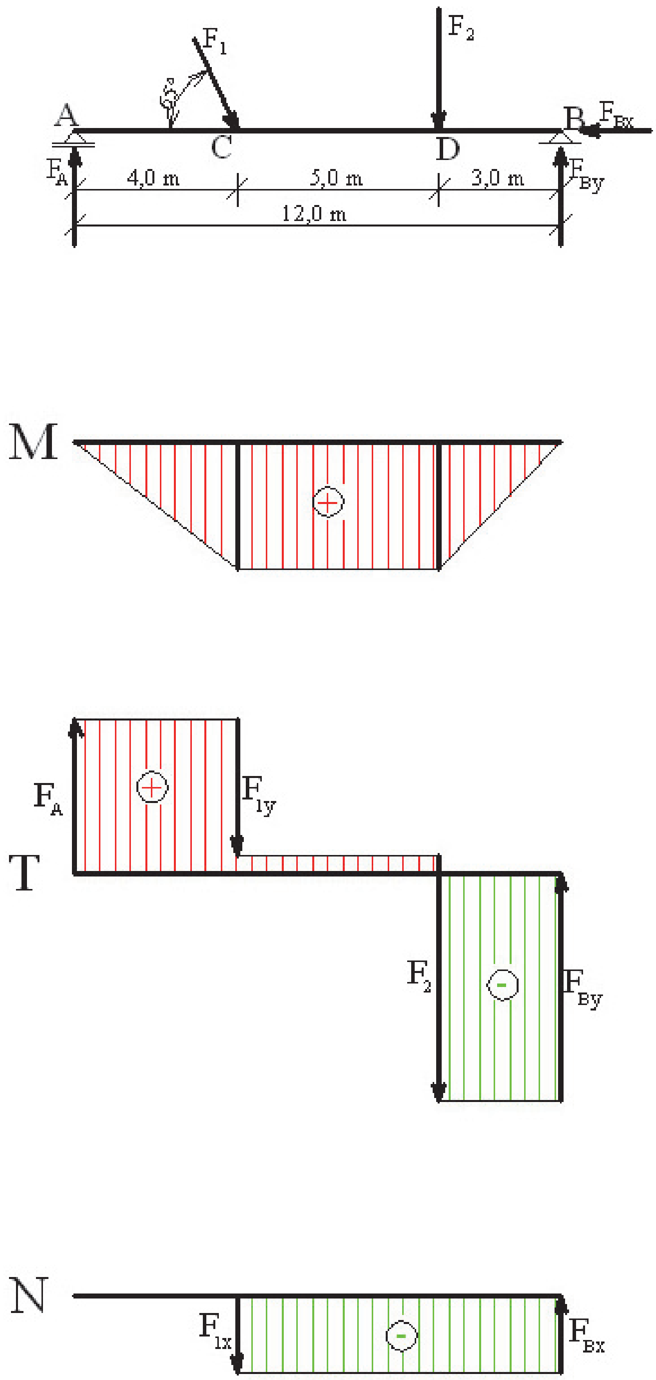


Fig. 107

Trari i thjeshtë i ngarkuar me ngarkesë të shpërndarë në mënyrë të barabartë (ngarkesë të kontinuar)

Procedura është e njëjtë si te trari i thjeshtë me ngarkesë të përqendruar, me atë se ngarkesa e shpërndarë në mënyrë të barabartë zëvendësohet me forcën e përqendruar e cila vepron në rëndimin e ngarkesës. Madhësia e asaj force është e barabartë me sipërfaqen e ngarkesës, kurse caktohet sipas shprehjes: $F = q \cdot l$

Shembulli nr. 40. Në mënyrë analitike të caktohen reaksionet dhe madhësitë statike për ngarkesën e dhënë të trarit të thjeshtë (fig. 108)

$F_1 = 10kN$; $q = 3kN/m$

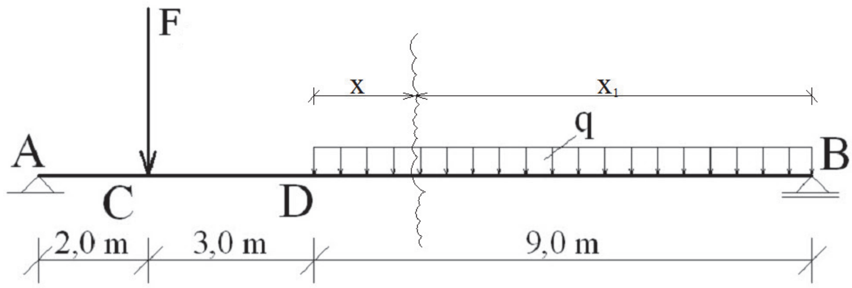


Fig. 108

Zgjidhje:
Analitike:

$$F = q \cdot 9 = 3 \cdot 9 = 27\ kN$$

1. Caktimi i reaksioneve (fig. 109):

$$\sum M_A = 0$$

$$F \cdot 2 + q \cdot 9 \cdot (2+3+4{,}5) - F_B \cdot 14 = 0$$

$$10 \cdot 2 + 3 \cdot 9 \cdot (2+3+4{,}5) - F_B \cdot 14 = 0$$

$$F_B = \frac{20 + 256.5}{14} = 19{,}75\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_A \cdot 14 - F \cdot 12 - q \cdot 9 \cdot 4{,}5 = 0$$

$$F_A \cdot 14 - 10 \cdot 12 - 3 \cdot 9 \cdot 4{,}5 = 0$$

$$F_A = \frac{120 + 121.5}{14} = 17{,}25\,kN$$

Kontrolli:

$$\sum Y = 0$$

$$F_A - F - q \cdot 9 + F_B = 0$$

$$17{,}25 - 10 - 3 \cdot 9 + 19{,}75 = 0$$

$$37 - 37 = 0$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_A = 0$$

$$M_C = F_A \cdot 2 = 17{,}25 \cdot 2 = 34{,}5\ kN \cdot m$$

$$M_D = F_A \cdot 5 - F \cdot 3 = 17{,}25 \cdot 5 - 10 \cdot 3 = 86{,}25 - 30 = 56{,}25\ kN \cdot m$$

$$M_B = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_A^l = 0$$

$$T_A^d = F_A = 17{,}25\,kN$$

$$T_C^l = T_A^d = F_A = 17{,}25\,kN$$

$$T_C^d = T_C^l - F = 17{,}25 - 10 = 7{,}25\,kN$$

$$T_D = T_C^d = 7{,}25\,kN$$

$$T_B^l = T_D - q \cdot 9 = 7{,}25 - 3 \cdot 9 = 7{,}25 - 27 = -19{,}75\,kN$$

$$T_B^d = T_B^l + F_B = -19{,}75 + 19{,}75 = 0$$

Prerja ku T = 0 quhet prerje e **rrezikshme**, sepse në atë prerje momenti rënës ka vlerë ekstreme.

Që të caktohet pozita e prerjes së rrezikshme, forcën transversale e shprehim në funksion të gjatësisë së ngarkesës *q* para prerjes (fig. 108).

$$T_X^l = F_A - F - q \cdot x = 0;\quad 17{,}25 - 10 - 3 \cdot x = 0;\quad x = \frac{17{,}25 - 10}{3} = 2{,}417\,m$$

kontrolli:

$$T_{x_1}^d = 0$$

$$T_{x_1}^d = F_B - q \cdot x_1 = 0;\quad x_1 = \frac{F_B}{q} = \frac{19{,}75}{3} = 6{,}583\,m$$

$$x + x_1 = 9;\qquad 2{,}417 + 6{,}583 = 9;\qquad 9 = 9$$

Vlera ekstreme e momentit rënës në këtë prerje është

$$M_{\max} = M_x = F_A(5 + x) - F(3 + x) - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_{\max} = 17{,}25 \cdot (5 + 2{,}417) - 10 \cdot (3 + 2{,}417) - 3 \cdot 2{,}417 \cdot \frac{2{,}417}{2}$$

$$M_{\max} = 17{,}25 \cdot 7{,}417 - 10 \cdot 5{,}417 - 3 \cdot 2{,}417 \cdot 1{,}2085 = 127{,}94 - 54{,}17 - 8{,}76$$

$$M_{\max} = 65{,}01\,kNm$$

kontrolli:

$$M_{\max} = F_A \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2}$$

$$M_{\max} = 19{,}75 \cdot 6{,}5833 - 3 \cdot 6{,}5833 \cdot \frac{6{,}5833}{2} = 130{,}0201 - 65{,}0097 = 65{,}01\,kNm$$

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{A-B} = 0$$

Shpjegim:

Diagrami i momenteve te trari i thjeshtë me ngarkesë të përzier përbëhet nga dy pjesë, respektivisht nga pjesa e lidhur me vija të drejta ku kemi veprim të ngarkesës së përqendruar, kurse me vijë të lakuar (parabolë) në pjesën ku vepron në mënyrë të barabartë ngarkesa e shpërndarë. Diagrami momental në (fig. 109).

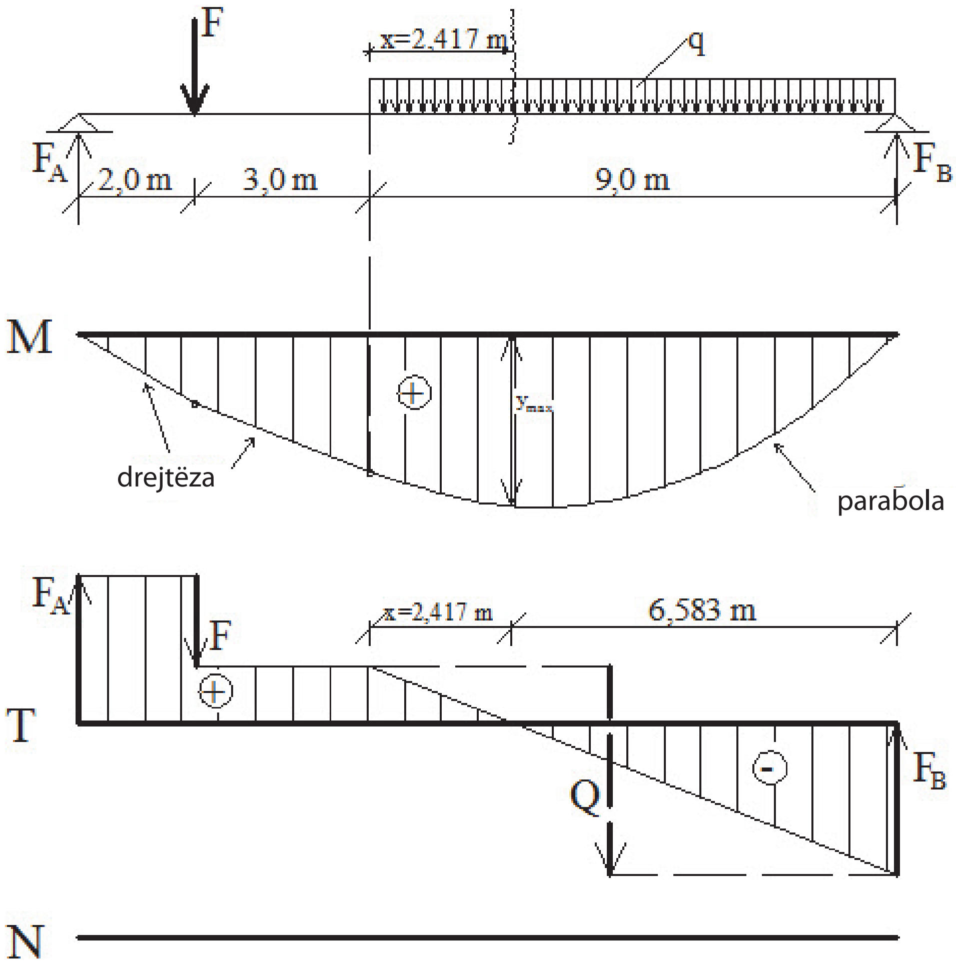


Fig. 109

Shembulli nr. 41: Në mënyrë analitike të caktohen madhësitë statike për ngarkesën e dhënë të trarit të thjeshtë (figura 110)

$F_1 = 5kN$; $F_2 = 3kN$ $q = 3kN/m$

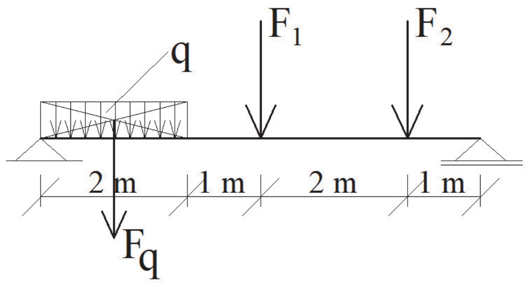


Fig. 110

Zgjidhje:
Analitike:

$$F_q = q \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6kN$$

1. Caktimi i reaksioneve (fig. 111):

$\sum M_A = 0$

$$F_q \cdot 1 + F_1 \cdot 3 + F_{2.} 5 - F_B \cdot 6 = 0$$
$$6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 - F_B \cdot 6 = 0$$
$$6 + 15 + 15 - F_B \cdot 6 = 0$$
$$36 - F_B \cdot 6 = 0$$
$$-F_B = -\frac{36}{6}$$
$$F_B = 6kN$$

$\sum M_B = 0$

$$F_{AY} \cdot 6 - F_q \cdot 5 - F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 1 = 0$$
$$F_{AY} \cdot 6 - 6 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$$
$$F_{AY} \cdot 6 - 30 - 15 - 3 = 0$$
$$F_{AY} \cdot 6 - 48 = 0$$
$$F_{AY} = \frac{48}{6}$$
$$F_{AY} = 8kN$$

Kontrolli:

$$\sum Y = 0$$
$$F_{Ay} - F_q - F_1 - F_2 + F_B = 0$$
$$8 - 6 - 5 - 3 + 6 = 0$$
$$14 - 14 = 0$$
$$0 = 0$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_A = 0$$
$$M_C = F_{AY} \cdot 2 - F_q \cdot 1 = 8 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 16 - 6 = 10kNm$$
$$M_D = F_{AY} \cdot 3 - F_q \cdot 2 = 8 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 24 - 12 = 12\ kN \cdot m$$
$$M_E = F_{AY} \cdot 5 - F_q \cdot 4 - F_1 \cdot 2 = 8 \cdot 5 - 6 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 40 - 24 - 10 = 6kNm$$
$$M_B = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_{AY} = 8kN$$
$$T_C = T_A^d - F_q = 8 - 6 = 2kN$$
$$T_D^l = T_C = 2kN$$
$$T_D^d = T_C^l - F_1 = 2 - 5 = -3kN$$
$$T_E^l = T_D^d = -3kN$$
$$T_E^d = T_E^l - F_2 = -3 - 3 = -6kN$$
$$T_B^l = T_E^d = -6kN$$
$$T_B^d = T_B^l + F_B = -6 + 6 = 0$$

Prerja e rrezikshme87

$$T_X = F_{Ay} - x \cdot q = 0$$
$$8 - x \cdot 3 = 0$$
$$x = \frac{8}{3} = 2{,}67\,m$$

Në këtë rast nuk ka prerje të rrezikshme sepse fitohet *x > 2m,* respektivisht në pjesën AC forca transversale nuk e ndërron shenjën.

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{A\text{-}B} = 0$$

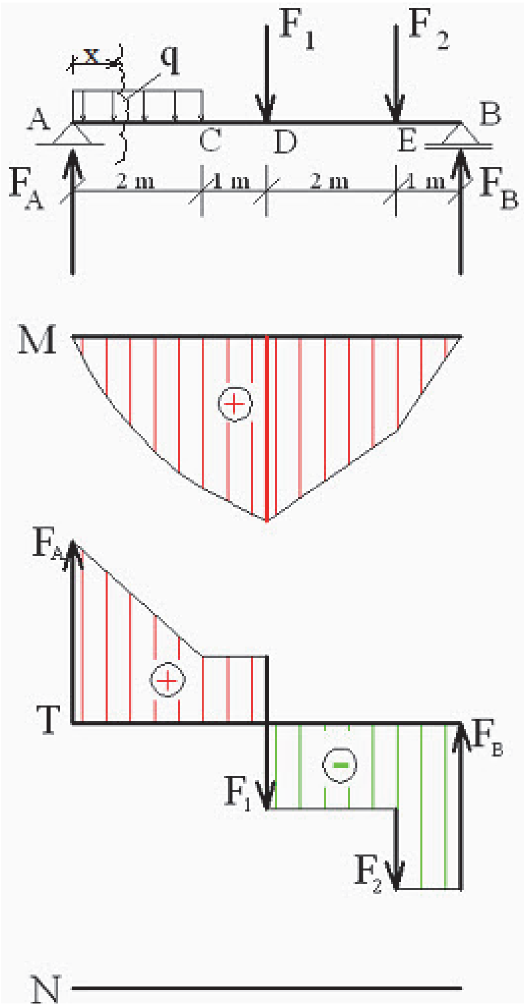


Fig. 111

Shembulli nr. 4: Në mënyrë analitike të caktohen madhësitë statike për ngarkesën e dhënë të trarit të thjeshtë (figura 112).

$F = 25kN$; $\alpha = 45^\circ$; $q = 3kN/m$

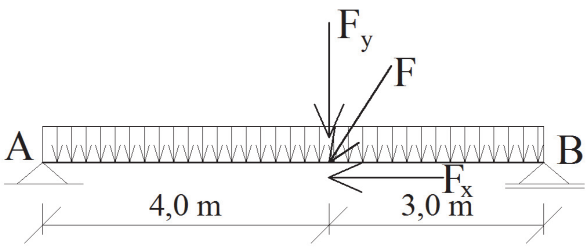


Fig. 112

Zgjidhje:

Analitike:

$F_{q1} = q \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12\,kN$ $\qquad F_{q2} = q \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9\,kN$

$F_Y = F \cdot \sin\alpha = 25 \cdot \sin 45^\circ = 25 \cdot 0{,}707 = 17{,}678\,kN$

$F_X = F \cdot \cos\alpha = 25 \cdot \cos 45^\circ = 25 \cdot 0{,}707 = 17{,}678\,kN$

1. Caktimi i reaksioneve (fig. 113):

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{q1} \cdot 2 + F_Y \cdot 4 + F_{q2} \cdot 5{,}5 - F_B \cdot 7 = 0$$

$$12 \cdot 2 + 17{,}678 \cdot 4 + 9 \cdot 5{,}5 - F_B \cdot 7 = 0$$

$$F_B = \frac{24 + 70{,}712 + 49{,}5}{7}$$

$$F_B = 20{,}602\, kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{AY} \cdot 7 - F_{q1} \cdot 5 - F_Y \cdot 3 - F_{q2} \cdot 1{,}5 = 0$$

$$F_{AY} \cdot 7 - 12 \cdot 5 - 17{,}678 \cdot 3 - 17{,}678 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$F_{AY} = \frac{60 + 53{,}034 + 26{,}517}{7}$$

$$F_{AY} = 18{,}076\, kN$$

Kontrolli:

$$\sum Y = 0$$

$$F_{AY} - F_{q1} - F_Y - F_{q2} + F_B = 0$$

$$18{,}076 - 12 - 17{,}678 - 9 + 20{,}602 = 0$$

$$38{,}678 - 38{,}678 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$F_{AX} - F_X = 0; \quad F_{AX} = F_X = 17{,}678\, kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{AX}^2 - F_{AY}^2} = \sqrt{17{,}678^2 - 18{,}076^2} = \sqrt{312{,}512 - 326{,}742} = \sqrt{639{,}254}$$

$$F_A = 25{,}283\, kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{AY}}{F_{AX}} = \frac{18{,}076}{17{,}678} = 1{,}0225; \qquad \varphi = 45^\circ$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_A = 0$$

$$M_C = F_{AY} \cdot 4 - F_{q1} \cdot 2 = 18{,}076 \cdot 4 - 12 \cdot 2 = 48{,}305\, kNm$$

$$M_B = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_A^l = 0$$

$$T_A^a = F_{AY} = 18{,}076\,kN$$
$$T_C^l = T_A^d - F_{q1} = 18{,}076 - 12 = 6{,}076\,kN$$
$$T_C^d = T_C^l - F_Y = 6{,}076 - 17{,}678 = -11{,}602\,kN$$
$$T_B^l = T_C^d - F_{q2} = -11{,}602 - 9 = -20{,}602\,kN$$
$$T_B^d = T_B^l + F_B = -20{,}602 + 20{,}602 = 0$$

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{A-C} = -F_X = -17{,}678\,kN$$

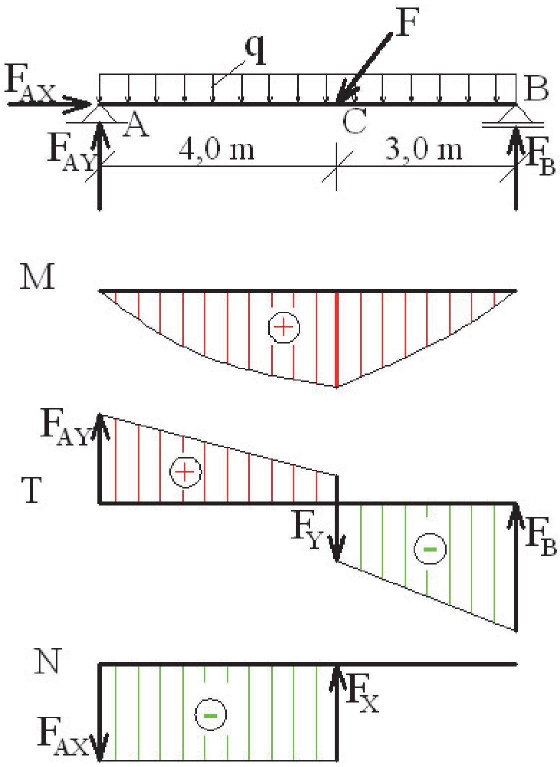


Fig. 113

Detyra për ushtrim:

Detyra nr. 1

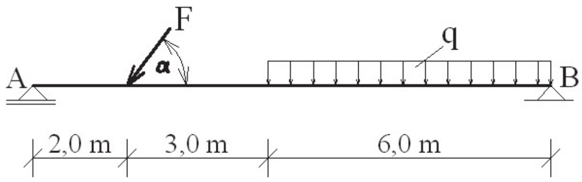


Fig. 114

$F = 10\,kN$; $\alpha = 60^{\circ}$; $q = 2\,kN/m$

Detyra nr. 2

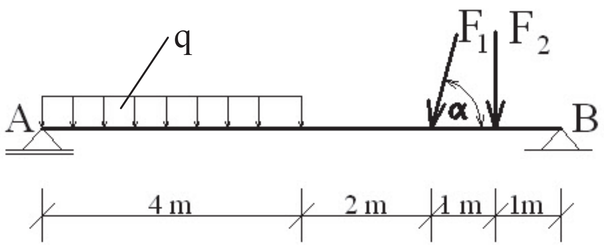


Fig. 115

$F_1 = F_2 = F = 10\,kN$; $\alpha = 60^{\circ}$; $q = 2\,kN/m$

6.2 TRARİ ME LËSHİME

Trari i mbështetur në dy kushineta, prej të cilave njëra është e palëvizshme, kurse tjetra e lëvizshme, skajet e të cilave janë vazhduar mbi një ose dy kushineta, quhet tra me lëshime. Reaksionet dhe madhësitë statike caktohen në metodën analitike dhe grafike (ne do të ndalemi në metodën analitike).

Shembull i një trari me një ose dy lëshime, të ngarkuar me ngarkesë të përqendruar dhe të përzier.

Shembulli nr. 43: Në mënyrë analitike të caktohen reaksionet dhe madhësitë e prera statike për ngarkesë ët dhënë te trari me dy lëshime (fig. 116)

$F_1 = 2\,kN$; $F_2 = 4\,kN$; $F_3 = 2\,kN$

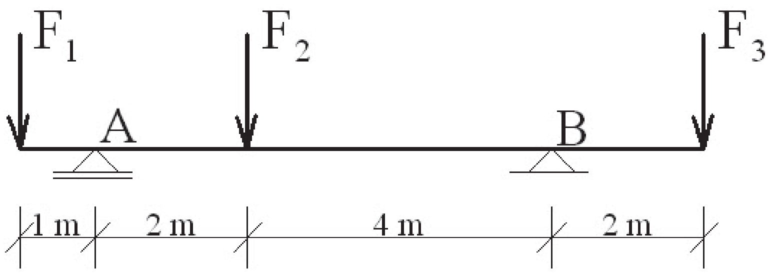


Fig. 116

Zgjidhje:
Analitike:

1. Caktimi i reaksioneve (fig. 117):

$$\sum M_A = 0$$

$$-F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 2 - F_{B\cdot} \cdot 6 + F_3 \cdot 8 = 0$$

$$-2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - F_B \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 0$$

$$F_B = \frac{-2+8+16}{6}$$

$$F_B = 3{,}67\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_1 \cdot 7 + F_A \cdot 6 - F_2 \cdot 4 + F_3 \cdot 2 = 0$$

$$-2 \cdot 7 + F_A \cdot -4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0$$

$$F_A = \frac{14+16-4}{6}$$

$$F_{AY} = 4{,}33\,kN$$

Kontrolli:

$$\sum Y = 0$$

$$-F_1 + F_A - F_2 + F_B - F_3 = 0$$

$$-2 + 4{,}33 - 4 + 3{,}67 - 2 = 0$$

$$-8 + 8 = 0$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_C = 0$$

$$M_A = -F_1 \cdot 1 = -2 \cdot 1 = -2kNm$$

$$M_D = -F_1 \cdot 3 + F_A \cdot 2 = -2 \cdot 3 + 4{,}33 \cdot 2 = -6 + 8{,}66 = 2{,}66\,kNm$$

$$M_B = -F_1 \cdot 7 + F_A \cdot 6 - F_2 \cdot 4 = -2 \cdot 7 + 4{,}33 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = -14 + 26 - 16 = -4\,kNm$$

$$M_E = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_C^l = 0$$

$$T_C^d = -F_1 = -2\ kN$$

$$T_A^l = T_C^d = -2\,kN$$

$$T_A^d = T_A^l + F_A = -2 + 4{,}33 = 2{,}33\,kN$$

$$T_D^l = T_A^d = 2{,}33\,kN$$

$$T_D^d = T_D^l - F_2 = 2{,}33 - 4 = -1{,}67\,kN$$

$$T_B^l = T_D^d = -1{,}67\,kN$$

$$T_B^d = T_B^l + F_B = -1{,}67 + 3{,}67 = 2\,kN$$

$$T_E^l = T_B^d = 2\,kN$$

$$T_E^d = T_E^l - F_3 = 2 - 2 = 0$$

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{C-E} = 0$$

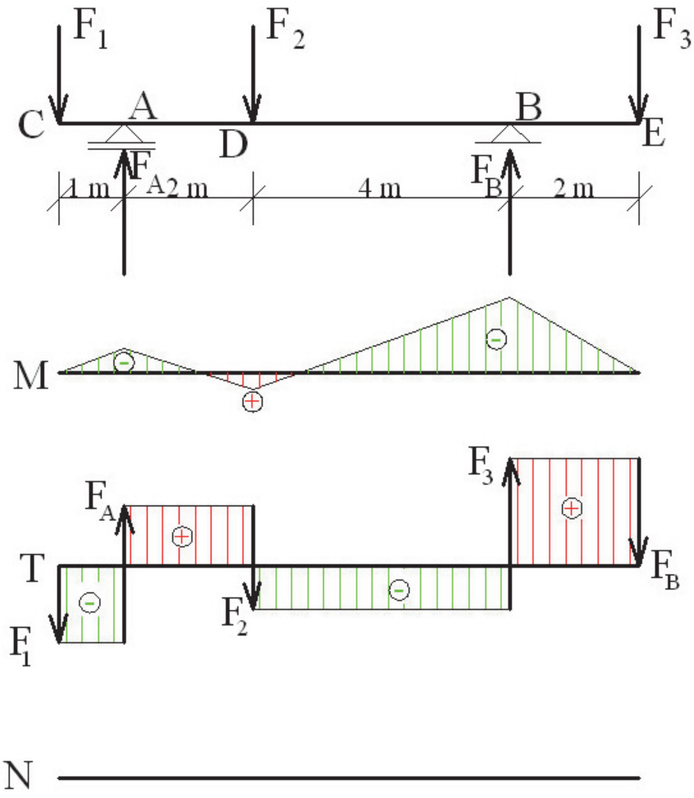


Fig. 117

Shembulli nr. 44: Në mënyrë analitike të caktohen madhësitë e prera statike për ngarkesë ët dhënë te trari me një lëshim (fig. 118)

$\alpha = 70^\circ$; $q = 3kN/m$

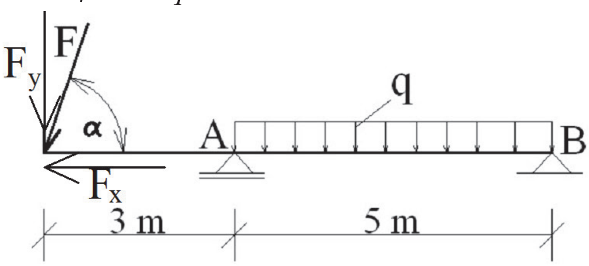


Fig. 118

Zgjidhje:
Analitike:

$$F_q = q \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15kN$$
$$F_X = F \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \cos 70^\circ = 8 \cdot 0{,}342 = 2{,}74\,kN$$
$$F_Y = F \cdot \sin\alpha = 8 \cdot \sin 70^\circ = 8 \cdot 0{,}9397 = 7{,}52\,kN$$

1. Caktimi i reaksioneve (fig. 119):

$$\sum M_A = 0$$

$$-F_Y \cdot 3 + F_q \cdot 2{,}5 - F_{BY} \cdot 5 = 0$$
$$-7{,}52 \cdot 3 + 15 \cdot 2{,}5 - F_{BY} \cdot 5 = 0$$
$$F_{BY} = \frac{-22{,}56 + 37{,}5}{5}$$
$$F_{BY} = 2{,}988\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_Y \cdot 8 + F_A \cdot 5 - F_q \cdot 2{,}5 = 0$$
$$-7{,}52 \cdot 8 + F_A \cdot 5 - 15 \cdot 2{,}5 = 0$$
$$F_A = \frac{60{,}16 + 37{,}5}{5}$$
$$F_A = 19{,}532\,kN$$

Kontrolli: $\sum Y = 0$

$$-F_Y + F_A - F_q + F_B = 0$$
$$-7{,}52 + 19{,}532 - 15 + 2{,}988 = 0$$
$$-22{,}52 + 22{,}52 = 0$$
$$0 = 0$$

$$\sum X = 0$$
$$-F_X + F_{BX} = 0$$
$$F_X = F_{BX} = 2{,}74\,kN$$
$$F_B = \sqrt{F_{BX}^2 + F_{BY}^2} = \sqrt{2{,}74^2 + 2{,}988^2} = \sqrt{7{,}51 + 8{,}93}$$
$$F_B = 4{,}05\,kN$$
$$tg\varphi = \frac{F_{BY}}{F_{BX}} = \frac{2{,}988}{2{,}74} = 1{,}0905109 \qquad \varphi = 47^\circ$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_C = 0$$
$$M_A = -F_Y \cdot 3 = -7{,}52 \cdot 3 = -22{,}56\,kNm$$
$$M_B = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_C^l = 0$$

$$T_C^d = -F_Y = -7{,}52\ kN$$
$$T_A^l = T_C^d = -7{,}52\,kN$$
$$T_A^d = T_A^l + F_A = -7{,}52 + 19{,}532 = 12{,}01\,kN$$
$$T_B^l = T_A^d - F_q = 12{,}01 - 15 = -2{,}99\,kN$$
$$T_B{}^d = 0$$

Në pjesën e pikës A nga pika B forca transversale e ndërron shenjën, që do të thotë se ka prerje të rrezikshme në distancë "x" nga pika A:

$$T_x = 0$$
$$F_{By} - q \cdot x = 0$$
$$x = \frac{F_{By}}{q} = \frac{2{,}988}{3} \approx 1m$$
$$x_{\max} = 5 - x = 5 - 1 = 4m$$
$$M_{\max} = -F_y \cdot 7 + F_A \cdot 4 - \frac{q \cdot x^2}{2}$$
$$M_{\max} = -7{,}52 \cdot 7 + 19{,}532 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4^2}{2}$$
$$M_{\max} = 1{,}50kNm$$

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{C-B} = F_{BX} = 2{,}74\,kN$$

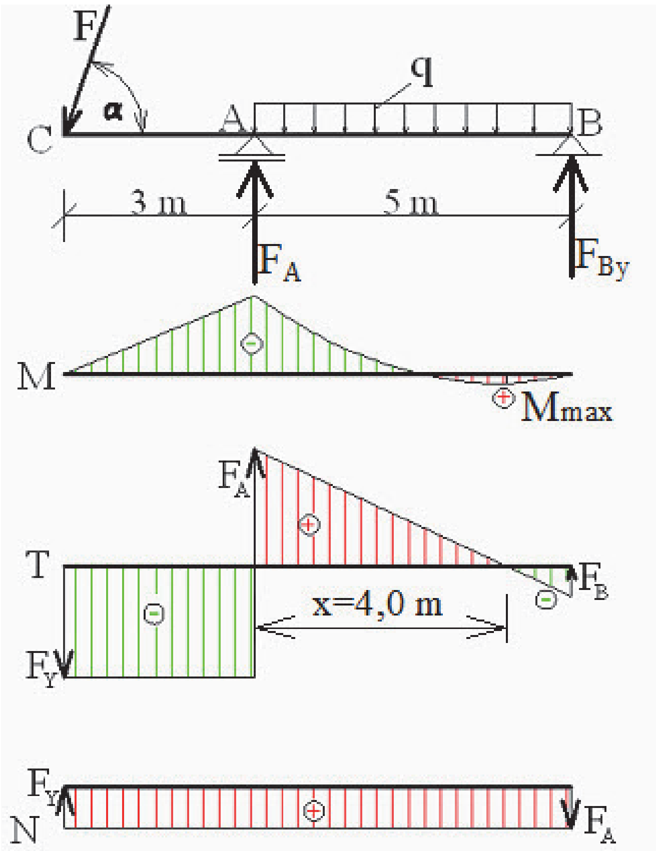


Fig. 119

Mbaj mend:

Trari me lëshime është mbajtës i caktuar statik, i cili me njërin ose me të dy skajet kalon mbi mbështetësit (kushinetat).

Nëse mbajtësi kalon vetëm në njërin skaj, quhet tra me një lëshim, por nëse kalon mbi dy skaje, quhet tra me dy lëshime.

Detyra për ushtrim:

Detyra nr. 1

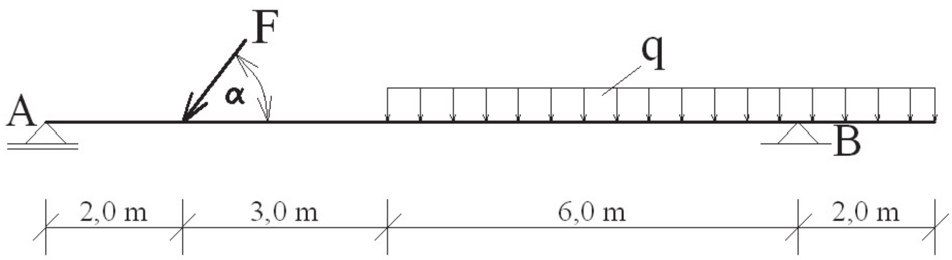


Fig. 120

$F = 13kN$; $q = 6kN/m'$; $\alpha = 60^\circ$

Detyra nr. 2

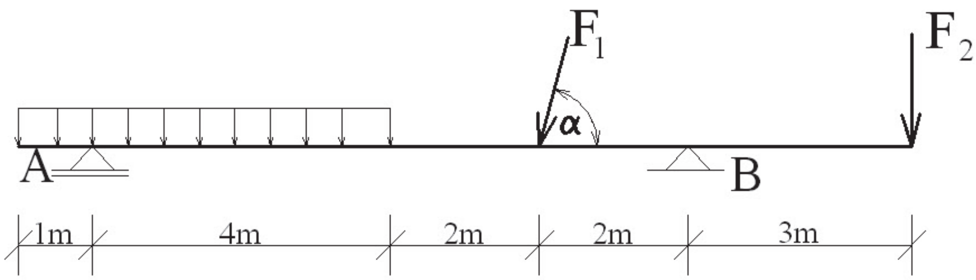


Fig. 121

$F_1 = 8kN$; $F_2 = 5kN$; $q = 6kN/m'$; $\alpha = 60^\circ$

6.3 KONZOLA

Mbajtësi tek i cili njëri skaj është i kufizuar, kurse tjetri është i lirë, quhet konzolë. Reaksionet dhe madhësitë statike caktohen sipas metodës analitike dhe grafike. (Ne do të ndalemi vetëm në metodën analitike). Nëse konzola është ngarkuar me forcë të përqendruar vertikale, në kufizim shkaktohet reaksioni vertikal dhe momenti i kufizimit (momenti riaktivuar).

Shembulli nr. 45: Në mënyrë analitike të caktohen madhësitë statike për përsëritjen e dhënë te trarët me dy lëshime (figura 122)

$F_1 = 2\,kN$; $\quad q = 3\,kN/m$

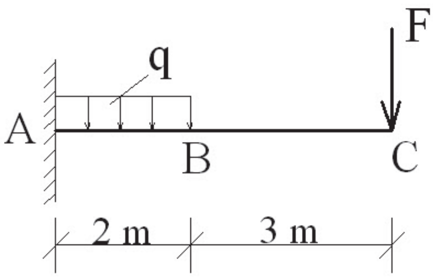


Fig. 122

Zgjidhje:

Analitike:

$$F_q = q \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6kN$$

1. Caktimi i reaksioneve (fig. 123):

$\Sigma M_A = 0$

$-M_A + q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 5 = 0$

$M_A = 16kNm$

$\sum Y = 0$

$$F_A - F_q - F = 0$$

$$F_A = 6 + 2 = 8\,kN$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_A = -F_q \cdot 1 - F \cdot 5 = -6 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -16\,kNm$$

$$M_B = -F \cdot 3 = -2 \cdot 3 = -6\,kNm$$

$$M_C = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_A^l = 0$$

$T_A^d = F_A = 8\ kN$

$T_B = F_A - F_q = 8 - 6 = 2\,kN$

$T_C^l = T_B = 2\,kN$

$T_C^d = T_C^l - F = 2 - 2 = 0$

4. Caktimi i forcave aksiale

$N_{A-C} = 0$

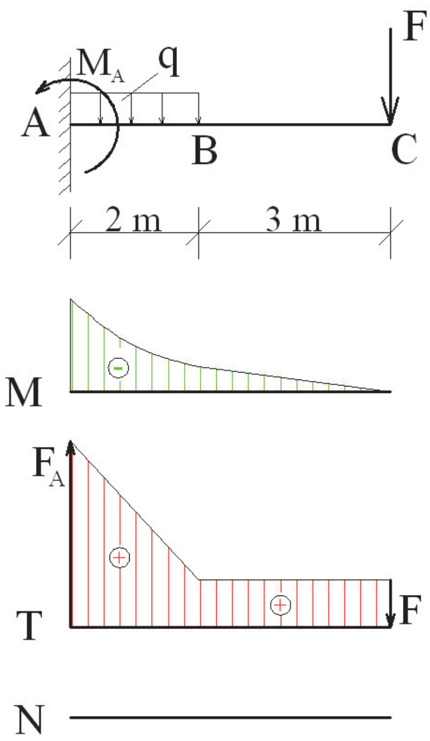


Fig. 123

Shembulli nr. 46: Në mënyrë analitike të caktohen madhësitë statike për përsëritjen e dhënë te trarët me dy lëshime (figura 124)

$F_1 = 5\,kN$; $q = 4\,kN/m$; $\alpha = 60^\circ$

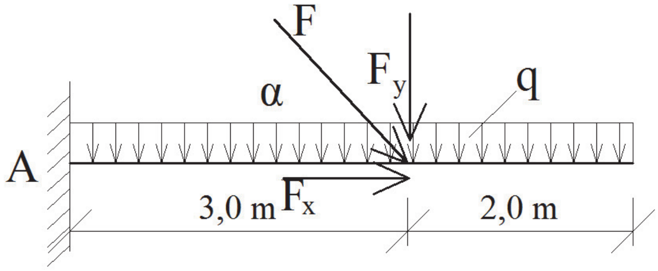


Fig. 124

Zgjidhje:

Analitike:

$$F_{q1} = q \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12kN$$
$$F_{q2} = q \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8\,kN$$
$$F_Y = F \cdot \sin\alpha = 5 \cdot \sin 60^\circ = 5 \cdot 0{,}866 = 4{,}33\ kN$$
$$F_X = F \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5\ kN$$

1. Caktimi i reaksioneve (fig. 125)

$$\sum Y = 0$$
$$F_{AY} - F_{q1} - F_Y - F_{q2} = 0$$
$$F_{AY} = 12 + 8 + 4{,}33 = 24{,}33kN$$

$$\sum X = 0$$
$$-F_{AX} + F_X = 0$$
$$F_{AX} = 2{,}5\,kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{AX}^2 + F_{AY}^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 24{,}33^2} = \sqrt{6{,}25 + 591{,}95} = 24{,}22\,kN$$
$$tg\varphi = \frac{F_{AY}}{F_{AX}} = \frac{24{,}33}{2{,}5} = 9{,}6001; \qquad \varphi = 86^\circ$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_A = -F_{q1} \cdot 3 - F_Y \cdot 6 - F_{q2} \cdot 8 = -12 \cdot 1{,}5 - 4{,}33 \cdot 3 - 8 \cdot 4 = -62{,}99\,kNm$$
$$M_B = -F_{q2} \cdot 2 = -8 \cdot 1 = -8\,kNm$$
$$M_C = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_{AY} = 24{,}33\ kN$$
$$T_B^l = F_{AY} - F_{q1} = 24{,}33 - 12 = 12{,}33\,kN$$
$$T_B^d = F_{AY} - F_{q1} - F_Y = 24{,}33 - 12 - 4{,}33 = 8\,kN$$
$$T_C = T_B^d - F_{q2} = 8 - 8 = 0\,kN$$

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{A-B} = F_{AX} = 2{,}5\,kN$$

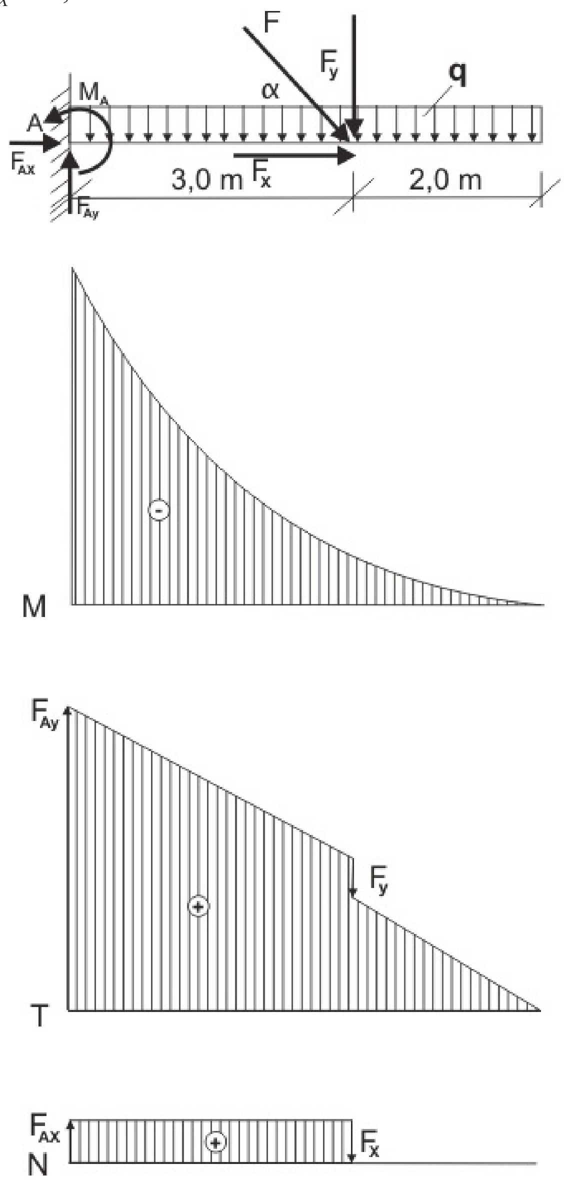


Fig. 125

Shembulli nr. 47: Në mënyrë analitike të caktohen madhësitë statike për përsëritjen e dhënë te trarët me dy lëshime (figura 126)

$F_1 = 4\,kN$; $F_2 = 2\,kN$ $q_1 = 3\,kN/m$; $q_2 = 1\,kN/m$

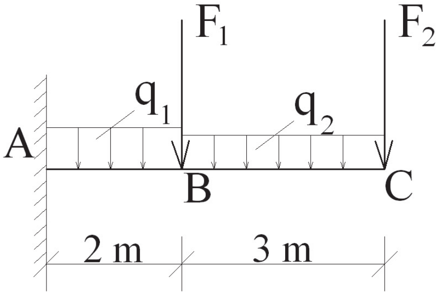


Fig. 126

Zgjidhje:
Analitike:

$$F_{q1} = q_1 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6\,kN$$
$$F_{q2} = q_2 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3\,kN$$

1. Caktimi i reaksioneve (fig. 127):

$$\sum Y = 0$$
$$F_A - F_{q1} - F_1 - F_{q2} - F_2 = 0$$
$$F_A = 6 + 4 + 3 + 2 = 15\,kN$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_A = -F_{q1} \cdot 1 - F_1 \cdot 2 - F_{q2} \cdot 3{,}5 - F_2 \cdot 5 = -6 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 6 \cdot 3{,}5 - 2 \cdot 5$$
$$M_A = -6 - 8 - 10{,}5 - 10 = -34{,}5\,kNm$$
$$M_B = -F_{q2} \cdot 1{,}5 - F_2 \cdot 3 = -3 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot 3 = -4{,}5 - 6 = -10{,}5\ kNm$$
$$M_C = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_A = 15\ kN$$

$$T_B^l = F_A - F_{q1} = 15 - 6 = 9\,kN$$
$$T_B^d = T_B^l - F_1 = 9 - 4 = 5\,kN$$
$$T_C^l = T_B^d - F_{q2} = 5 - 3 = 2\,kN$$
$$T_C^d = T_C^l - F_2 = 2 - 2 = 0$$

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{A-C} = 0$$

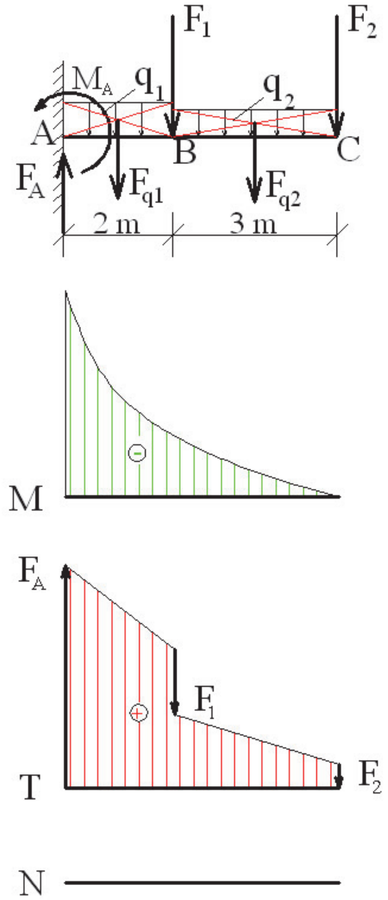


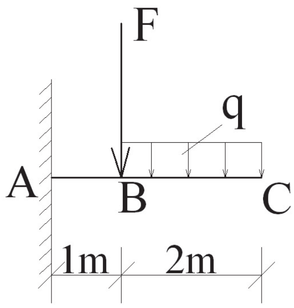
Fig. 127

Mbaj mend:

Konzola është mbajtës i caktuar statik i cili në një skaj është kufizuar, kurse në tjetrin është i lirë.

Detyra për ushtrim:

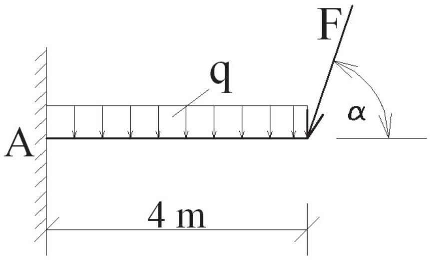
Detyra nr. 1



$F = 8\,kN$; $q = 5\,kN/m$

Fig. 128

Detyra nr. 1



$F = 6\,kN$; $q = 2\,kN/m$;
$\alpha = 45^\circ$

Fig. 129

6.4 TRARİ İ GERBERİT

Sistemi i caktuar statik i trarit i cili mund të jetë përbërë prej dy ose më tepër trarëve, trarëve me një ose dy lëshime, ose konzolave, ndërmjet veti të lidhur me nyje, quhen **trarë të Gerberit**. Trarët e tillë për herë të parë i ka zbatuar Gerberi, emrin e të cilit e mbajnë edhe sot.

Nyjet e këtyre trarëve janë konstruktuar ashtu që mund të mbajnë forca transversale dhe aksiale, por jo edhe momente. Për shkak të kësaj mund të vihet kushti $M_G = 0$

Që trari i Gerberit të jetë i caktuar në mënyrë statike, respektivisht të gjitha reaksionet të caktohen nga të tri kushtet analitike për baraspeshë: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M = 0$ dhe kushti plotësues $M_G = 0$, duhet të ekzistojë raporti i caktuar midis numrit i mbështetësve dhe numrit të nyjeve. Trari i Gerberit me *n* mbështetës duhet të ketë *n -2* nyje. Që mbajtësi i tillë të jetë stabil, në një fushë duhet të ketë më së tepërmi dy nyje, kurse në fushat e skajshme nëse mbështetësi nuk është kufizuar, vetëm një nyje. Nyjet te trari i Gerberit shpërndahen në atë mënyrë që i njëjti mund të zbërthehet në trarë të thjeshtë, trarë me lëshime dhe konzolë. Vendi i nyjeve nga pikëpamja ekonomike parashikohen ashtu që momentet në fushë janë gati i barabarta me momentet mbi mbështetësit. Të gjitha kushinetat duhet të jenë të lëvizshme përveç njërës, e cila është e palëvizshme dhe i pranon forcat horizontale.

Skemat statike të disa llojeve të trarëve të Gerberit janë treguar në figurën 130.

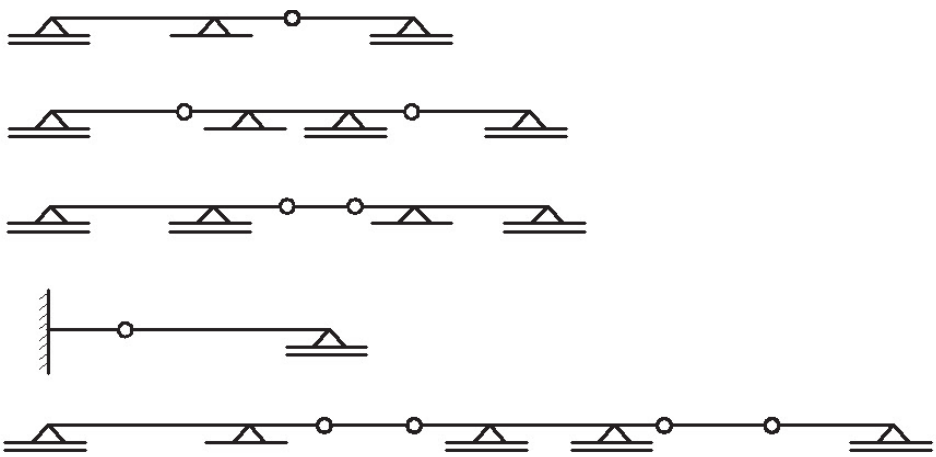


Fig. 130

Reaksionet dhe madhësitë statike të trarit të Gerberit caktohen sipas dy metodave:
-metodës direkte;
-metodës së mbivendosjes.

Shembuj nga trari i Gerberit

Shembulli nr. 48: Në mënyrë analitike të caktohen madhësitë statike për ngarkesën e dhënë te trari e Gerberit (figura 131)

$F = 16kN$; $q = 3kN/m$

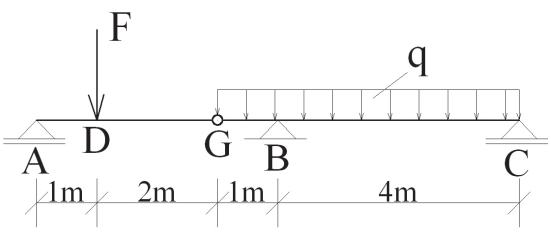


Fig. 131

Zgjidhje:

Analitike:

$$F_{q1} = q \cdot 1 = 3 \cdot 1 = 3\,kN$$

$$F_{q2} = q \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12\,kN$$

1. Caktimi i reaksioneve (fig. 132):

trari: *A - G*:

$$\sum M_G^l = 0$$

$$F_A \cdot 3 - F \cdot 2 = 0$$

$$F_A = \frac{16 \cdot 2}{3} = 10{,}67\,kN$$

$$\sum Y = 0$$

$$F_A - F - F_G = 0$$

$$F_G = 16 - 10{,}67 = 5{,}33\,kN$$

Nyja zëvendësohet me kushinetë të palëvizshme e cila i hedh reaksionet pranë mbajtësit primar në të cilin ndërhyn

trari me lëshim: *G - C*

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_G \cdot 1 - F_{q1} \cdot 0{,}5 + F_{q2} \cdot 2 - F_C \cdot 4 = 0$$

$$F_C = \frac{-5{,}33 \cdot 1 - 3 \cdot 0{,}5 + 12 \cdot 2}{4} = 4{,}29\,kN$$

$$\sum M_C = 0$$

$$-F_G \cdot 5 - F_{q1} \cdot 4{,}5 + F_B \cdot 4 - F_{q2} \cdot 2 = 0$$

$$F_B = \frac{5{,}33 \cdot 5 + 3 \cdot 4{,}5 + 12 \cdot 2}{4} = 16{,}04\,kN$$

kontrolli:

$$\sum Y = 0$$

$$F_A - F + F_B - F_{q1} - F_{q2} + F_C = 0$$

$$10{,}67 - 10 + 16{,}04 - 3 - 12 + 4{,}29 = 0; \quad 31 - 31 = 0; \qquad 0 = 0$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_A = 0$$

$$M_D = F_A \cdot 1 = 10{,}67 \cdot 1 = 10{,}67\,kNm$$

$$M_B = F_A \cdot 4 - F \cdot 3 - F_{q1} \cdot 0{,}5 = 10{,}67 \cdot 4 - 16 \cdot 3 - 3 \cdot 0{,}5 = -6{,}833\ kNm$$

$$M_C = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_A = 10{,}67\ kN$$
$$T_D^l = T_A^d = 10{,}67\,kN$$
$$T_D^d = T_D^l - F = 10{,}67 - 16 = -5{,}33\,kN$$
$$T_G = -5{,}33\,kN$$
$$T_B^l = T_G - F_{q1} = -5{,}33 - 3 = -8{,}33\,kN$$
$$T_B^d = T_B^l + F_B = -8{,}33 + 16{,}04 = 7{,}71\,kN$$
$$T_C^l = T_B^d - F_{q2} = 7{,}71 - 12 = -4{,}29\,kN$$
$$T_C^d = T_C^l + F_C = -4{,}29 + 4{,}29 = 0$$

Prerja e rrezikshme

$$T_X = F_C - x \cdot q = 0$$
$$x = \frac{4{,}29}{3} = 1{,}43\,m$$
$$M_{\max} = M_X = F_C \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 4{,}29 \cdot 1{,}43 - 3 \cdot 1{,}43 \cdot \frac{1{,}43}{2}$$
$$M_{\max} = 3{,}067\,kNm$$

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{A-C} = 0$$

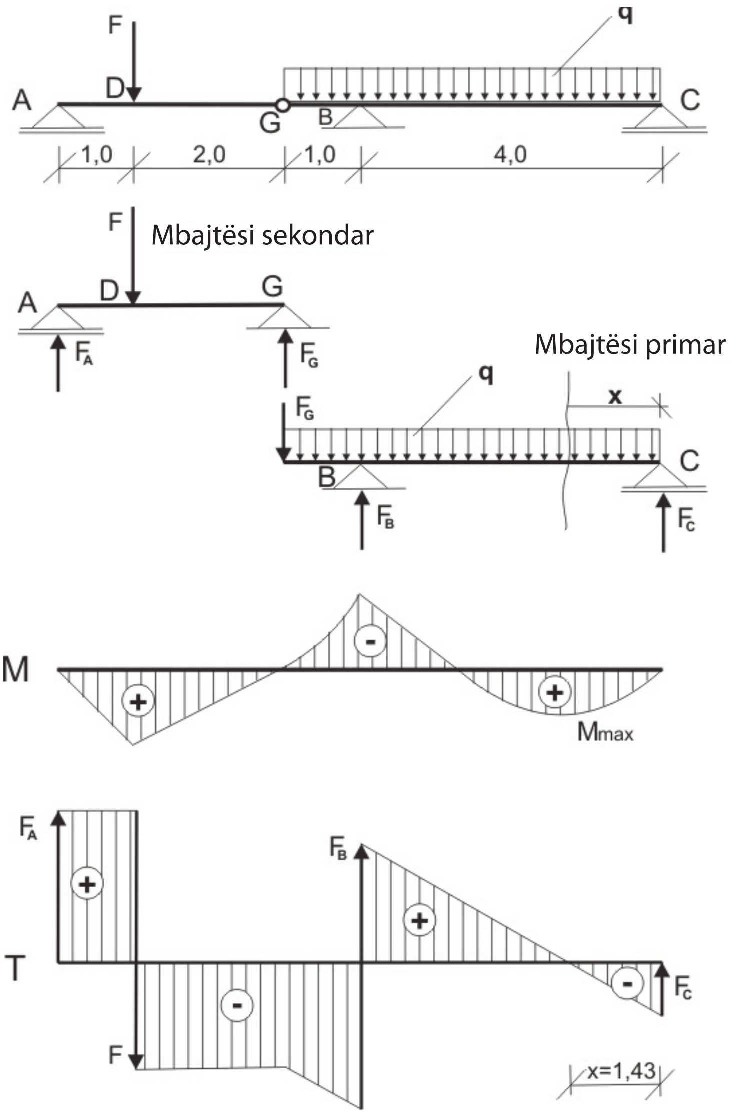


Fig. 132

Shembulli nr. 49: Në mënyrë analitike të caktohen madhësitë statike për ngarkesën e dhënë te trari e Gerberit (fig. 133)

$F_1 = 8\ kN; \qquad F_2 = 4\ kN; \qquad q = 2\ kN/m$

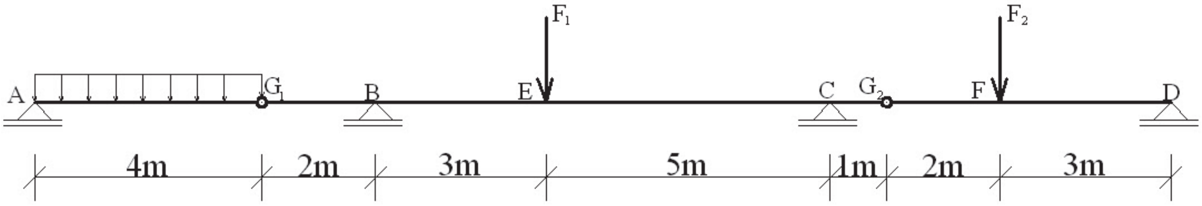


Fig. 133

Zgjidhje:

Analitike:

$$F_{q1} = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8\,kN$$

1. Caktimi i reaksioneve (fig. 134):

trari: *A -G₁*:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{q1} \cdot 2 - F_{G1} \cdot 4 = 0$$

$$F_{G1} = \frac{8 \cdot 2}{4} = 4\,kN$$

$$\sum M_{G1} = 0$$

$$F_A \cdot 4 - F_{q1} \cdot 2 = 0$$

$$F_A = \frac{8 \cdot 2}{4} = 4\,kN$$

trari: $G_2 - D$

$$\sum M_{G2} = 0$$

$$F_2 \cdot 2 - F_D \cdot 5 = 0$$

$$F_C = \frac{4 \cdot 2}{5} = 1{,}6\,kN$$

$$\sum M_D = 0$$

$$F_{G2} \cdot 5 - F_2 \cdot 3 = 0$$

$$F_{G2} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2{,}4\,kN$$

trari: $G_1 - G_2$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_{G1} \cdot 2 + F_1 \cdot 3 - F_C \cdot 8 + F_{G2} \cdot 9 = 0$$

$$F_C = \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 2{,}4 \cdot 9}{8} = 4{,}7\,kN$$

$$\sum M_C = 0$$

$$-F_{G1} \cdot 10 + F_B \cdot 8 - F_1 \cdot 5 + F_{G2} \cdot 1 = 0$$

$$F_B = \frac{4 \cdot 10 + 8 \cdot 5 - 2{,}4 \cdot 1}{8} = 9{,}7\,kN$$

kontrolli:

$$\sum Y = 0$$

$$A - D$$

$$F_A - F_{q1} + F_B - F_1 + F_C - F_2 + F_D = 0$$

$$4 - 8 + 9{,}7 - 8 + 4{,}7 - 4 + 1{,}6 = 0$$

$$20 - 20 = 0; \quad 0 = 0$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_A = 0$$

$$M_B = -F_{G1} \cdot 2 = -4 \cdot 2 = -8\,kNm$$

$$M_E = -F_{G1} \cdot 5 + F_B \cdot 3 = -4 \cdot 5 + 9{,}7 \cdot 3 = 9{,}1\,kNm$$

$$M_C = -F_{G2} \cdot 1 = -2{,}4 \cdot 1 = -2{,}4\,kNm$$

$$M_F = F_D \cdot 3 = 1{,}6 \cdot 3 = 4{,}8\,kNm$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_A^l = 0$$

$$T_A^d = F_A = 4\ kN$$

$$T_{G1} = F_A - F_{q1} = 4 - 8 = -4\,kN$$

$$T_B^l = T_{G1} = -4\,kN$$

$$T_B^d = T_B^l + F_B = -4 + 9{,}7 = 5{,}7\,kN$$

$$T_E^l = T_B^d = 5{,}7\,kN$$

$$T_E^d = T_E^l - F_1 = 5{,}7 - 8 = -2{,}3\,kN$$

$$T_C^l = T_E^d = -2{,}3\,kN$$

$$T_C^d = T_C^l + F_C = -2{,}3 + 4{,}7 = 2{,}4\,kN$$

$$T_F^l = T_C^d = 2{,}4\,kN$$

$$T_F^d = T_F^l - F_2 = 2{,}4 - 4 = -1{,}6\,kN$$

$$T_D^l = T_F^d = -1{,}6\,kN$$

$$T_D^d = T_D^l - F_D = -1{,}6 + 1{,}6 = 0$$

Prerja e rrezikshme

$$T_X = F_A - x \cdot q = 0$$

$$x = \frac{4}{2} = 2{,}0\,m$$

$$M_{\max} = M_X = F_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 8 - 4$$

$$M_{\max} = 4{,}0\,kNm$$

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{A-D}=0$$

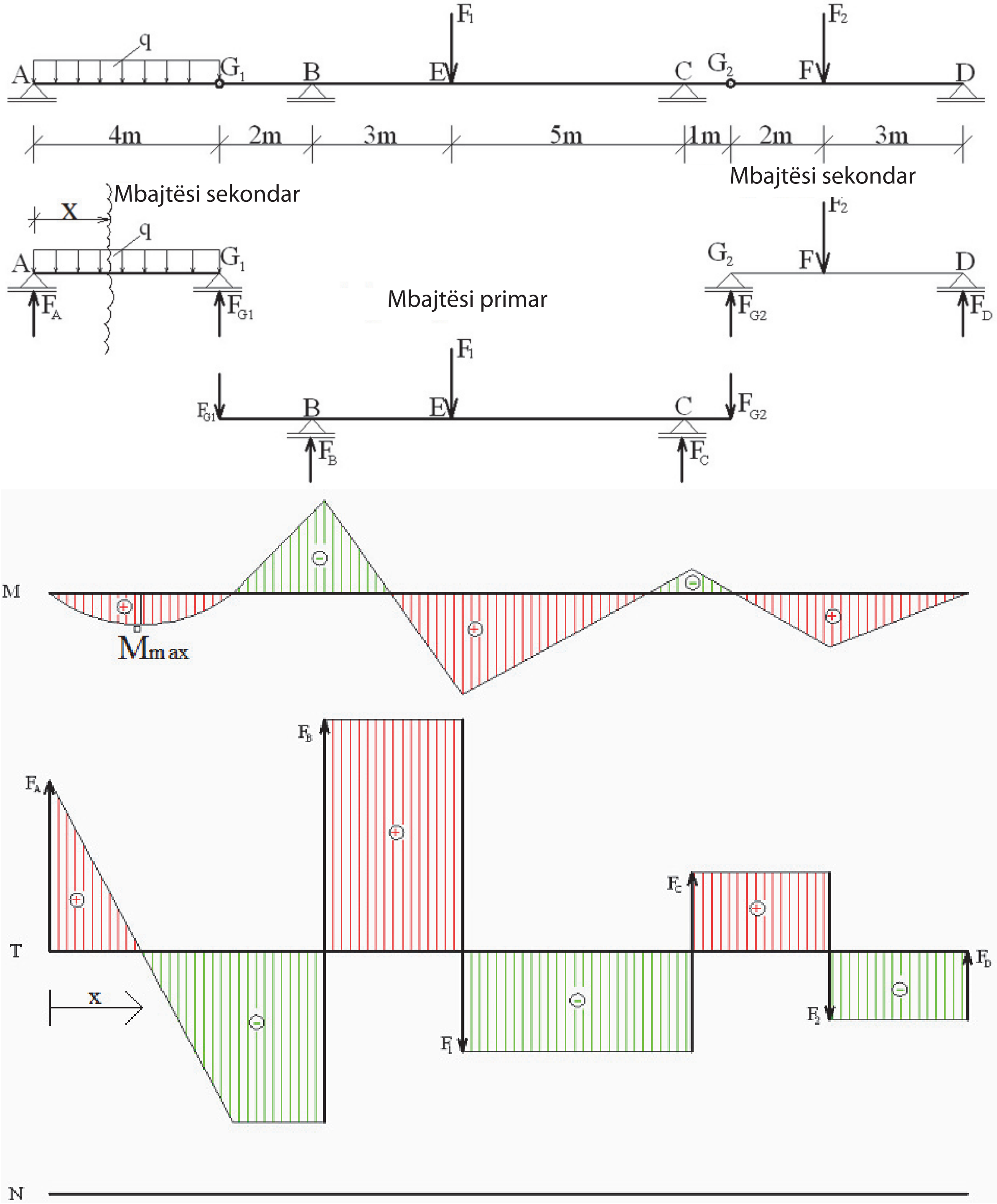

F1
F2
q
A
G1
B
E
C
G2
F
D
4m
2m
3m
5m
1m
2m
3m
Mbajtësi sekondar
Mbajtësi sekondar
x
FA
FG1
Mbajtësi primar
FG2
FD
FB
FC
M
Mmax
T
N

Fig. 134

Shembulli nr. 50: Në mënyrë analitike të caktohen madhësitë statike për ngarkesën e dhënë te trari e Gerberit (figura 135)

$q = 3\ kN/m$

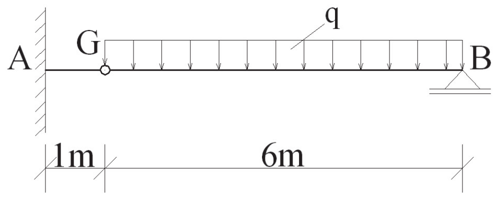


Fig. 135

Zgjidhje:

Analitike:

$$F_q = q \cdot 6 = 3 \cdot 6 = 18\,kN$$

1. Caktimi i reaksioneve

trari: G - B:

$$\sum M_G^d = 0$$

$$F_q \cdot 3 - F_B \cdot 6 = 0$$

$$F_B = \frac{18 \cdot 3}{6} = 9\,kN$$

trari: A - G:

$$\sum Y = 0$$

$$F_A - F_q + F_B = 0$$

$$F_A = 18 - 9 = 9\,kN$$

kontrolli:

$$\sum Y = 0$$

$$F_A - F_q + F_B = 0$$

$$9 - 18 + 9 = 0$$

$$18 - 18 = 0; \qquad 0 = 0$$

2. Caktimi i momenteve rënëse

$$M_A = -F_q \cdot 4 + F_B \cdot 7 = -18 \cdot 4 + 9 \cdot 7 = -9\ kNm$$

$$M_G = 0$$

$$M_B = 0$$

3. Caktimi i forcave transversale

$$T_A^l = 0$$
$$T_A^d = F_A = 9\ kN$$
$$T_G = F_A = 9\,kN$$
$$T_B^l = F_A - F_q = 9 - 18 = -9\,kN$$
$$T_B^d = 0$$

Prerja e rrezikshme

$$T_X = F_B - x \cdot q = 0$$
$$x = \frac{9}{3} = 3{,}0\,m$$
$$M_{\max} = M_X = F_B \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 9 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 18 - 13{,}5$$
$$M_{\max} = 13{,}5\,kNm$$

4. Caktimi i forcave aksiale

$$N_{A-D} = 0$$

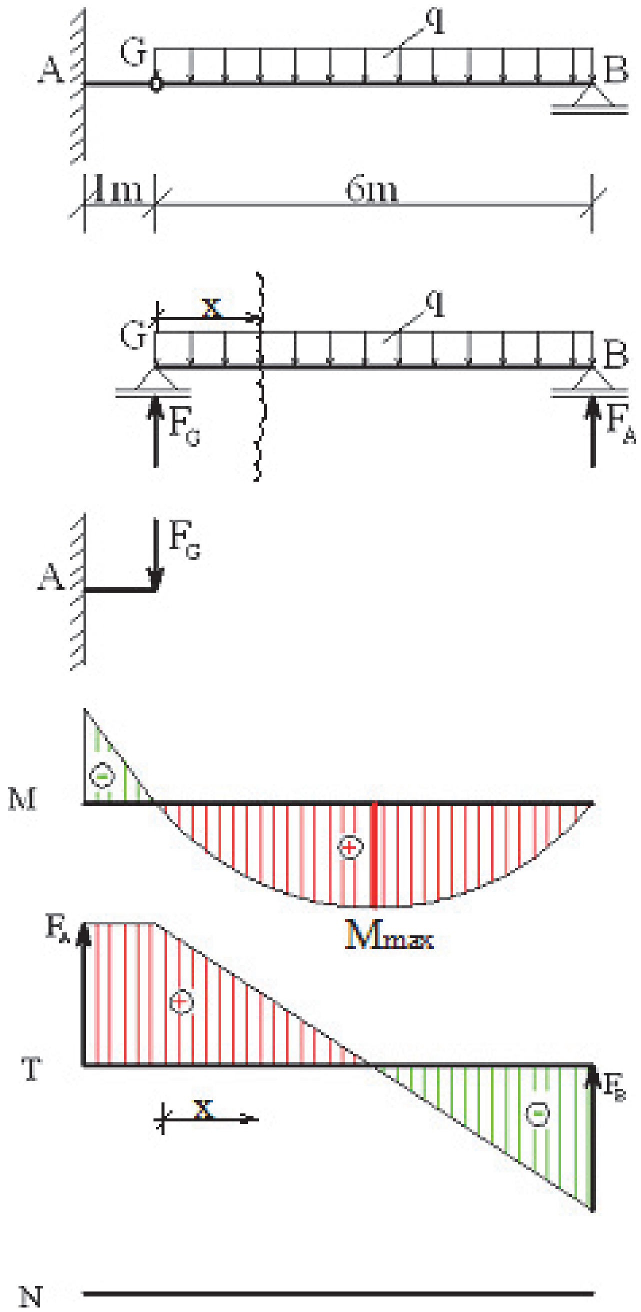


Fig. 136

Mbaj mend:

Trari i Gerberit është sistem i përbërë i caktuar i trarit prej shumë trarëve të thjeshtë, trarëve me lëshime dhe konzolave.

Detyra për ushtrim:

Detyra nr. 1

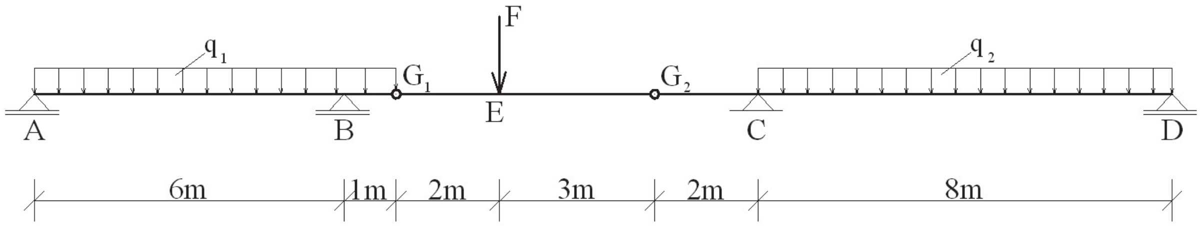


Fig. 137

$F = 10\,kN$; $q_1 = 3\,kN/m$; $q_2 = 4\,kN/m$

Detyra nr. 2

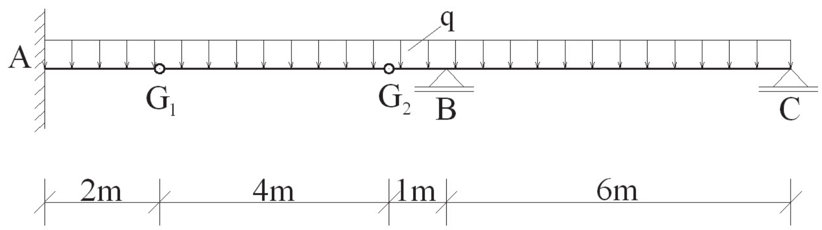


Fig. 138

$q = 3\,kN/m$

7. MBAJTËSIT E RRAFSHËT TË PARMAKËVE

Përveç mbajtësve të plotë të rrafshët, me të cilët jemi njoftuar, ekzistojnë edhe mbajtës të parmakëve ose vetëm parmakë (fig. 139). Këtu do të njihemi vetëm me mbajtësit e rrashtë të parmakëve, kurse përveç tyre ekzistojnë edhe mbajtës hapësinorë të parmakëve.

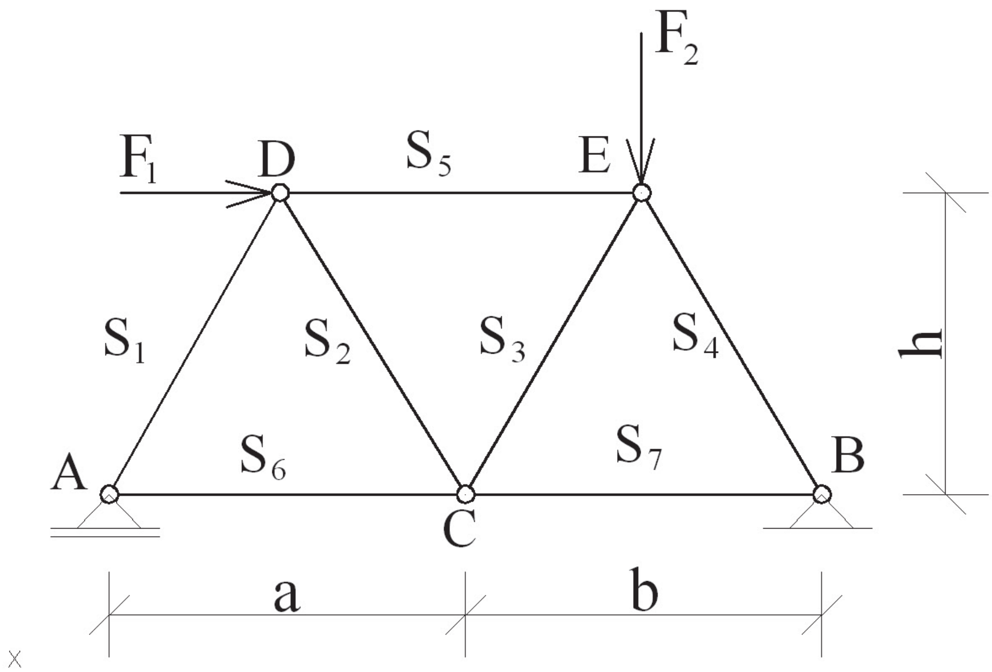


Fig. 139

Mbajtësit e rrafshët të parmakëve janë përbërë prej shkopinjve të palëvizshëm të lidhur ndërmjet veti me lidhëse ideale (pa fërkim) në trekëndësha. Këto lidhëse quhen **nyje**.

Kur në një lidhëse ka vetëm dy shkopinj, ato janë nyje të thjeshta (nyjet A dhe B në fig. 158). Nyjet me tre dhe më tepër shkopinj janë nyje të përbëra, (nyjet C ose E në fig. 158). Shkopinjtë të cilët e kufizojnë tërë parmakun, quhen shkopinj të qartë (S_1 S_5 S_4 S_6 dhe S_7; fig. 158). Shkopinjtë e brendshëm janë shkopinj plotësues (S_2 dhe S_3).

Ngarkesat te parmakët mund të jenë: **vertikale, të pjerrëta** dhe **horizontale**, por mund të veprojnë vetëm në nyjet dhe në rrafshin e parmakut. Kjo do të thotë, nëse ngarkesa vepron midis dy nyjeve fqinje në fushë, duhet të shpërndahet në këto dy nyje.

Nën ndikim të forcave të jashtme në shkopinjtë e parmakut paraqiten vetëm forcat aksiale (në prerjet e shkopinjve te parmakët idealë nuk ka momente të lakimit ose forca transversale). Me llogaritjen e këtyre forcave në shkopinj do të njihemi më vonë.

Mbajtësit e parmakëve kanë zbatim të madh në ndërtimtari edhe atë si: mbajtës të mbulesës, vinçat, kranet, urat e tjera (fig. 140).

Materiali nga i cili punohen parmakët është: **çeliku, druri dhe botoni i armuar**.

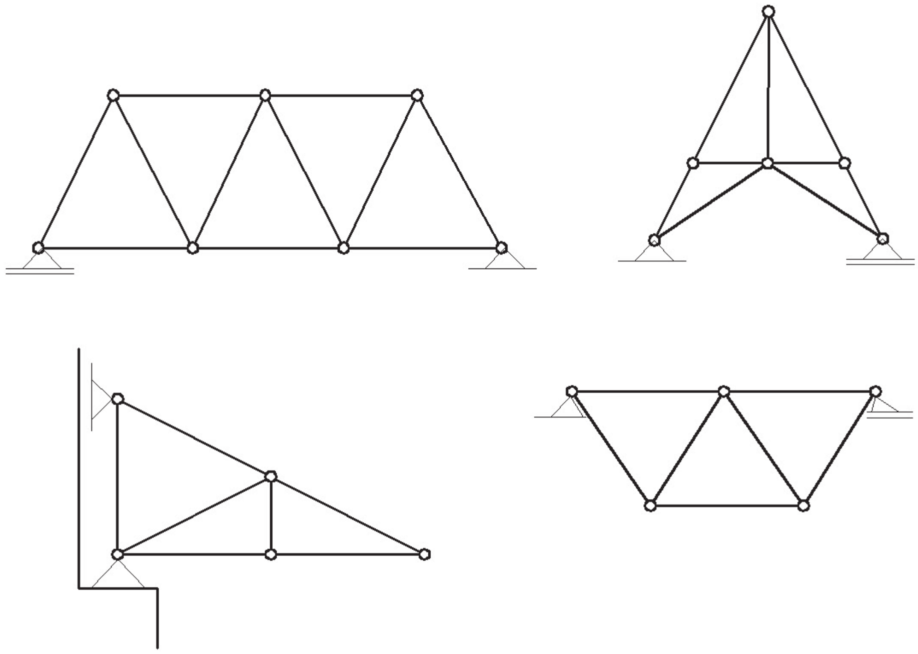


Fig. 140

Në raport me sistemin statik parmakët mund të jenë: **tra i thjeshtë, tra me lëshime, trari i Gerberit** e tjera.

7.1 PËRCAKTİMİ STATİK İ PARMAKËVE

Te mbajtësit e parmakëve ekziston përcaktim dhe papërcaktim i jashtëm dhe i brendshëm statik.

Parmaku është i përcaktuar jashtë në mënyrë statike kur reaksionet mund t'i caktojmë me zbatim të të tri kushteve analitike për baraspeshë:

$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0$

Nëse kur reaksionet nuk mund t'i caktojmë vetëm me ndihmë të tri barazimeve kryesore për baraspeshë, parmaku është i papërcaktuar jashtë në mënyrë statike. Ne do të njihemi vetëm me mbajtësit e jashtëm të caktuar në mënyrë statike.

Te mbajtësit e parmakëve të përcaktuar jashtë në mënyrë statike patjetër duhet të ekzistojë raporti midis numrit të shkopinjve dhe numrit të nyjeve. Që parmaku të jetë mbajtës i palëvizshëm dhe figurë e pandryshuar, gjithashtu duhet të ekzistojë varshmëri midis numrit të shkopinjve (S) dhe numrit të nyjeve (n). Nga të gjitha poligonet vetëm trekëndëshi është i palëvizshëm d.m.th. nuk e ndryshon formën e vet nga veprimi i çdo ngarkese në kulmet e tij. Domethënë, mbajtësi i parmakut duhet të përbëhet prej trekëndëshave. Për trekëndëshin e parë nevojiten tre shkopinj dhe tri nyje $n - 3$ nyje nevojiten $2 \cdot (n - 3)$ shkopinj.

Nëse kah kjo shtojmë tre shkopinj për trekëndëshi e parë, do të fitojmë:

$$S = 3 + 2 \cdot (n - 3) = 2n - 3$$

$$S = 2n - 3$$

Parmakët për të cilët është plotësuar kushti i dhënë midis numrit të shkopinjve "S" dhe numrit të nyjeve "n" janë parmakë të brendshëm të caktuar statikë. Ne do të njihemi vetëm me mbajtësit e parmakëve të brendshëm të caktuar statikë.

Parmakët ku është $S > 2n - 3$ janë parmakë të brendshëm të caktuar statikë.

Nëse është $S < 2n-3$ parmaku është i brendshëm lëvizës ose labil.

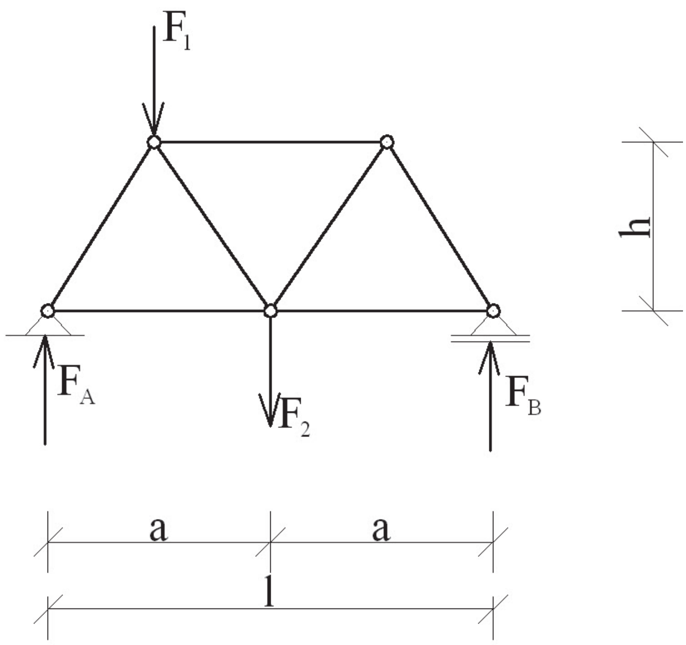


Fig. 141

Reaksionet te mbajtësit e parmakëve caktohen krejtësisht në mënyrë të njëjtë si edhe te mbajtësit e plotë të trarëve, d.m.th. në mënyrë grafike dhe analitike (shihni figurën 141).

Ne do të ndalemi vetëm në caktimin analitik.

Caktimi **analitik** i reaksioneve bëhet me përdorimin e kushteve për baraspeshë të forcave në rrafshin $\sum X = 0$; $\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$ dhe kontrollit $\sum Y = 0$.

Për parmakun e treguar në figurën 141, kushti $\sum X = 0$ është plotësuar, sepse ngarkesa është vertikale.

Në reaksionin **B** caktohet nga kushti:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot \frac{a}{2} + F_2 \cdot a - F_B \cdot 1 = 0; F_B = ...$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_A \cdot 1 - F_1 \cdot \frac{3a}{2} - F_2 \cdot a = 0; F_A = ...$$

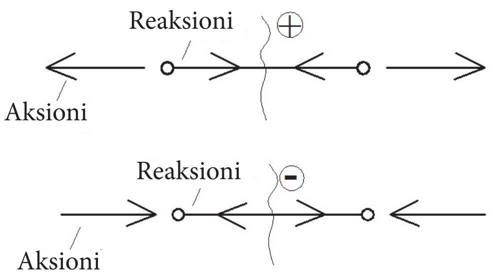
Kontrolli: $\sum Y = 0; \; F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0$

Përveç reaksioneve, te mbajtësit e parmakëve caktohen edhe forcat e brendshme në shkopinj. Këto forca caktohen sipas metodës grafike dhe analitike.

7.2 METODAT E CAKTİMİT TË FORCAVE NË SHKOPİNJ

Për caktimin e forcave të brendshme te shkopinjtë e mbajtësve të parmakëve, duhet të plotësohen këto supozime:

- ngarkesa të veprohet në nyjet;
- shkopinjtë të jenë të drejtë;
- shkopinjtë të jenë të lidhur me lidhëse pa fërkim;
- forcat e jashtme të jenë në rrafsh të njëjtë me parmakun dhe
- forcat e brendshme në shkopinj të jenë në shtrirje, ose në shtypje dhe supozohet se veprojnë në boshtin e rëndimit të shkopit.



Me plotësimin e supozimeve të përmendura prej parmakut real kalohet në parmak ideal.

Forcat e shkopinjve të mbajtësve të parmakëve mund të caktohen në shumë mënyra.

Metoda grafike për caktimin e forcave të shkopinjve të mbajtësve të parmakëve e propozuar nga fizikani anglez Maksvel (Maxwell, 1864), kurse e përpunuar nga inxhinieri italian Kremona (Cremona, 1872), shfrytëzohet në rastet kur duhet të caktohen të gjitha forcat e shkopinjve të konstruksionit të parmakut.

Metoda analitike për caktimin e forcave të shkopinjve në prerje të caktuara të mbajtësve të parmakëve është propozuar nga ana e inxhinierit gjerman Riter (Ritter, 1863).

Metoda grafike për caktimin e forcave të shkopinjve në prerje të caktuara të mbajtësve të parmakëve, është propozuar nga ana e inxhinierit Kulman (Culmann, 1866) nga Zvicra

Këtu do të njihemi vetëm me metodën e Kremonit dhe metodën e Riterit.

7.3 METODA E KREMONIT

Metoda e Kremonit është metodë e pastër grafike për caktimin e forcave të shkopinjve te parmakët. Kjo metodë e ka atë përparësi që me ndihmën e një vizatimi caktohen forcat e shkopinjve të parmakëve.

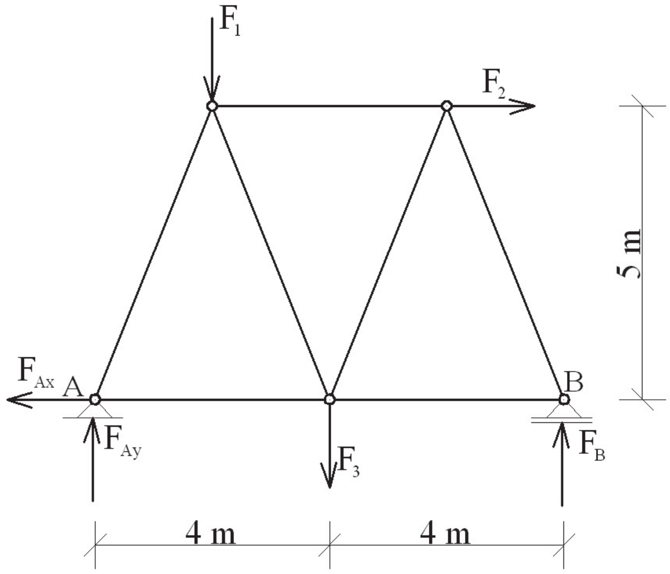
Caktimi i forcave të shkopinjve sipas kësaj metode bazohet në këto rregulla:

- nëse i tërë mbajtësi është në baraspeshë të veprimit të forcave të jashtme, patjetër edhe çdo nyje e prerë e mbajtësit të jetë në baraspeshë nga veprimi i forcave të jashtme dhe të brendshme të cilat veprojnë në atë nyje;
- forcat e jashtme dhe të brendshme (forcat e shkopinjve), të cilat bien në një nyje, paraqesin një sistem të forcave të cilat bien në një pikë dhe kushti grafik i të cilave për baraspeshë është që ato të sigurojnë plan të mbyllur të forcave, në cilën kahje ndiqen. Zgjidhja është e mundshme nëse kemi më së tepërmi dy kahje të panjohura (intensitetin dhe kahjen e panjohur, kurse drejtimin e njohur). Për çdo nyje konstruktojmë poligon të mbyllur të forcave.

Pas caktimit të reaksioneve konstruktojmë plan të forcave të jashtme (fig. 161), duke i marrë parasysh edhe reaksionet në mbështetës (kushineta), duke e formësuar kornizën në kahje të akrepave të orës.

Niset nga nyja A (ku ka vetëm dy shkopinj) dhe forcat e jashtme. Procedurën e njëjtë e përsërisim edhe për nyjet C dhe E, në të cila ka nga dy forca të panjohura. Në nyjen B në të vërtetë bëhet kontrolli i tërë planit të Kremonit, i cili patjetër duhet të jetë i mbyllur. Me matje të gjatësive të forcave të caktuara në shkopinj në planin e Kremonit të forcave me ndihmën e shkallës, i fitojmë forcat e vërteta të shkopinjve të parmakut. Me atë parmaku është gati për dimensionim.
Nëpërmjet shembujve numerik kjo metodë do të paraqitet në mënyrë më detale.

Detyra nr. 51 Sipas metodës së Kremonit të caktohen forcat në shkopinjtë në parmakun e dhënë (figura 142)



$F_1 = 5\,kN$;
$F_2 = 4\,kN$;
$F_3 = 6\,kN$

Fig. 142

Zgjidhje:
Analitike:

1. Caktimi i reaksioneve

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 4 - F_B \cdot 8 = 0$$

$$F_B = \frac{F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 4}{8} = \frac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 4}{8} = 6{,}75\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 8 - F_1 \cdot 6 - F_3 \cdot 4 + F_2 \cdot 5 = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{F_1 \cdot 6 + F_3 \cdot 4 - F_2 \cdot 5}{8} = \frac{5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 5}{8} = 4{,}25\,kN$$

$\sum X = 0$

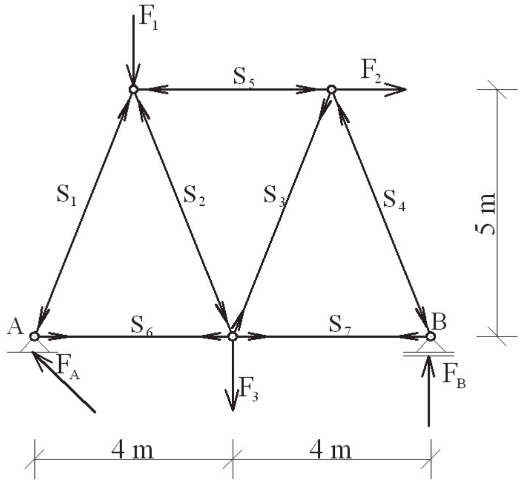
$$-F_{Ax} + F_2 = 0\,; \quad F_{Ax} = F_2 = 4\,kN$$

kontrolli:

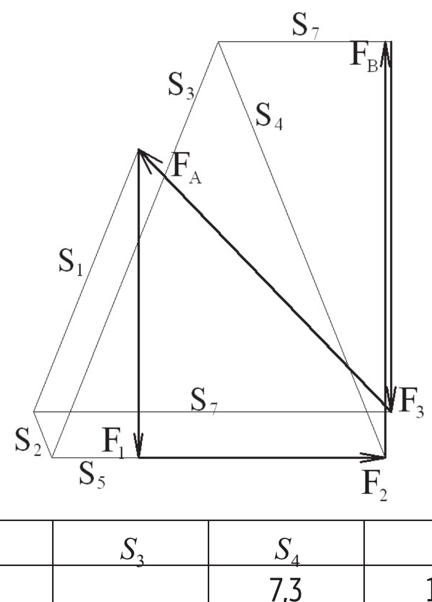
$\sum Y = 0$

$$F_{Ay} - F_1 - F_3 + F_B = 0$$
$$4{,}25 - 5 - 6 + 6{,}75 = 0$$
$$0 = 0$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{4^2 + 4{,}25^2} = 5{,}836\,kN$$
$$tg\varphi = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{4{,}25}{4} = 1{,}0625 \qquad \varphi = 46^\circ$$



Сл.143



Shkopinjtë	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
- kN	4,6	0,8		7,3	1,4		
+ kN			7,3			5,7	2,7

Detyra nr. 52 Sipas metodës së Kremonit të caktohen forcat në shkopinjtë në parmakun e dhënë (figura 146)

$F_1 = 6\,kN$; $F_2 = 4\,kN$;

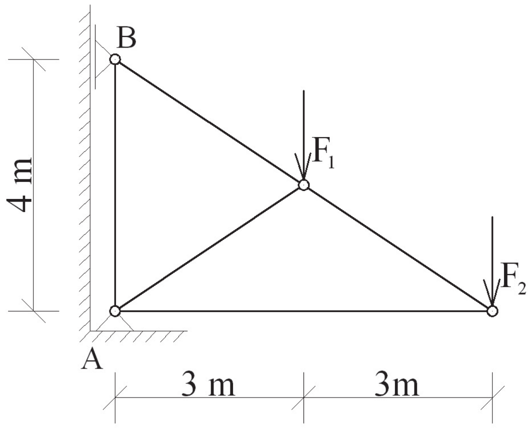


Fig. 146

Zgjidhje:
Analitike:

1. Caktimi i reaksioneve

$$\sum M_A = 0$$

$$-F_B \cdot 4 + F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6 = 0$$

$$F_B = \frac{F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6}{4} = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 6}{4} = 10{,}5\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_{AX} \cdot 4 + F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6 = 0$$

$$F_{AX} = \frac{F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6}{4} = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 6}{4} = 10{,}5\,kN$$

kontrolli:

$$\sum X = 0$$

$$-F_B + F_{AX} = 0$$

$$-10{,}5 + 10{,}5 = 0$$

$$0 = 0$$

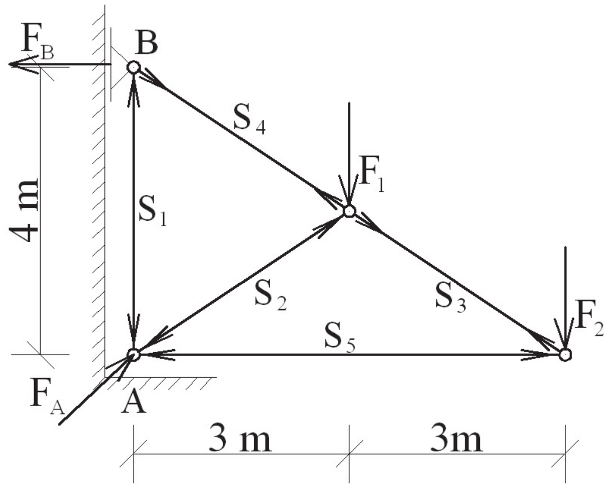
$$\sum Y = 0$$

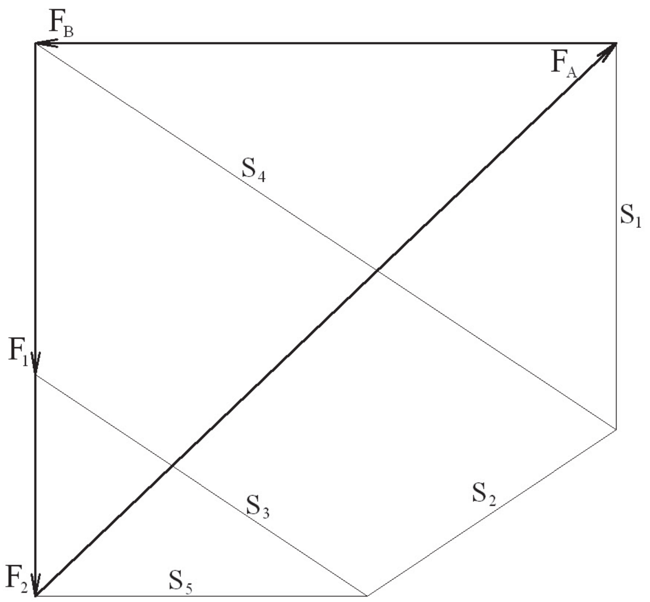
$$F_{Ay} - F_1 - F_2 = 0$$

$$F_{Ay} = F_1 + F_2 = 6 + 4 = 10\,kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{10{,}5^2 + 10^2} = \sqrt{110{,}25 + 100} = 14{,}5\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{10}{10,5} = 0,95238\,; \quad \varphi = 43^\circ$$





Сл.147

shkopinjtë		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
forca	shtypja	7,0	5,4			6,0
kN	shtrirja			7,2	12,6	

7.4 METODA E RITERIT

Metoda e Riterit është metodë analitike për caktimin e forcave në shkopinjtë te parmakët. Esenca është në supozimin për baraspeshën e mbajtësit të parmakut nga veprimi i forcave të jashtme (këtu nënkuptohen edhe reaksionet), atëherë në cilëndo prerje të menduar patjetër duhet të ekzistojë baraspesha midis forcave të jashtme majtas (ose djathtas) të asaj prerjeje, me forcat e brendshme në shkopinjtë të cilët janë prerë. Me fjalë të tjera, patjetër duhet të plotësohen kushtet kryesore për baraspeshë për pjesën e menduar të prerë, respektivisht: ΣX = 0; ΣY = 0; ΣM = 0;

Mbajtësin e parmakut në mënyrë të menduar e presim në më tepër se tre shkopinj, forcat e të cilëve do t'i caktojmë (fig. 148), por nën kusht që të mos priten në nyje të njëjtë. Pjesën e majtë (ose të djathtë) të prerjes së parmakut në mënyrë të menduar e mënjanojmë dhe ndikimin e tij e zëvendësojmë me forca të panjohura të brendshme, të cilat tash i llogarisim si forca të jashtme. Nga kushtet e njohura analitike për baraspeshë i caktojmë këto tri forca të panjohura në shkopinjtë e parmakut. Zakonisht përdoret kushti ΣM = 0, kurse si pikë momentale shfrytëzohet prerja e të dy shkopinjve, forcat e të cilëve duhet të caktohen (pikat C ose D). Me atë ato forca i eliminojmë, prandaj mund ta caktojmë forcën në shkopin e tretë.

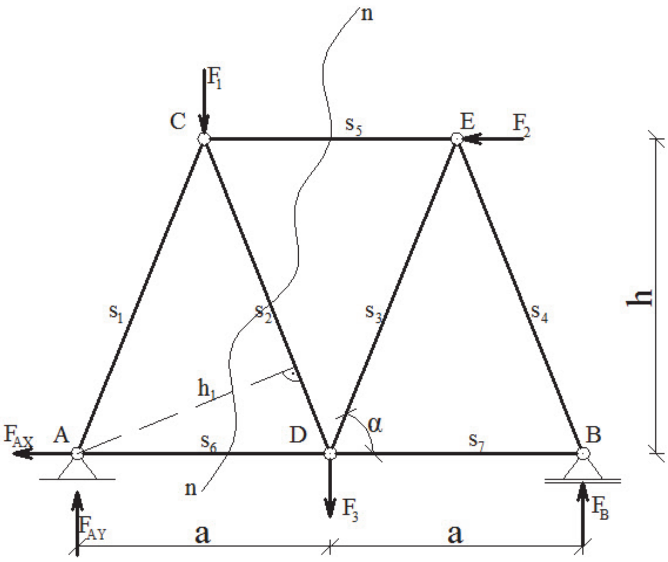


Fig. 148

Nëse rezultati për forcën e kërkuar është pozitiv, kjo do të thotë se kahja e cila është supozuar është e saktë. Në këtë rast ai rezultat të jetë negativ, kahja është e kundërt nga ajo e supozuar.

Do ta zbatojmë metodën e Riterit për mbajtësin në figurën 149. Supozojmë se mbajtësi është prerë me prerjen *N - N*, respektivisht do t'i caktojmë forcat S_5, S_2 dhe S_6

$$\sum M_c = 0$$

$$F_{ay} \cdot a - F_1 \cdot 0{,}5a - S_5 \cdot h = 0$$

$$S_5 = \frac{F_{Ay} \cdot a - F_1 \cdot 0{,}5 \cdot a}{h}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 0{,}5 \cdot a - S_6 \cdot h - F_{Ax} \cdot h = 0$$

$$S_6 = \frac{F_{Ay} \cdot 0{,}5 \cdot a - F_{Ax} \cdot h}{h}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 0{,}5 \cdot a - S_5 \cdot h + S_2 \cdot h_1 = 0$$

$$S_2 = \frac{-F_1 \cdot 0{,}5 \cdot a + S_5 \cdot h}{h_1}$$

Vërejtje:

$$tg\alpha = \frac{h}{0{,}5 \cdot a}; \quad \sin\alpha = \frac{h_1}{a}, \qquad h_1 = a \cdot \sin\alpha$$

Detyra nr. 53. Sipas metodës së Riterit të caktohen forcat në shkopinjtë në parmakun e dhënë (figura 149)

$$F_1 = 6\,kN; \qquad F_2 = 8\,kN$$

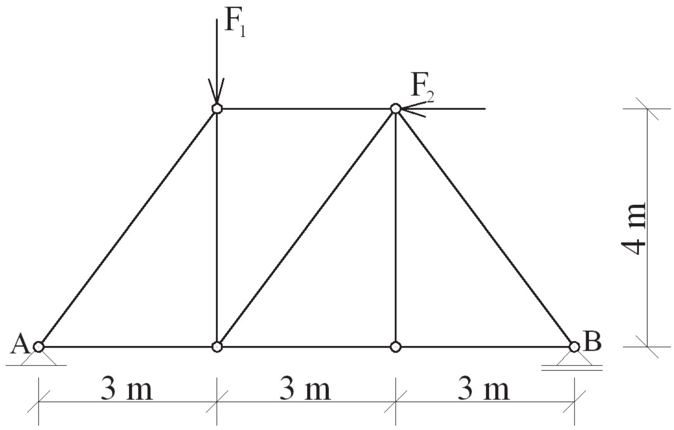


Fig. 149

Zgjidhje:

Analitike (fig. 150):

$$S = 2 \cdot n - 3$$

$$9 = 2 \cdot 6 - 3 = 9$$

1. Caktimi i reaksioneve

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 9 = 0$$

$$F_B = \frac{F_2 \cdot 4 - F_1 \cdot 3}{9} = \frac{6 \cdot 3 - 8 \cdot 4}{9} = -1{,}555\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 9 - F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 4 = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{F_1 \cdot 6 + F_2 \cdot 4}{9} = \frac{6 \cdot 6 + 8 \cdot 4}{9} = 7{,}555\,kN$$

kontrolli:

$$\sum Y = 0$$

$$F_{Ay} - F_1 - F_B = 0$$

$$7{,}555 - 6 - 1{,}555 = 0$$

$$7{,}555 = 7{,}555$$

$$\sum X = 0$$

$$F_{Ax} - F_2 = 0$$

$$F_{Ax} = F_2 = 8{,}0\,kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{8^2 + 7{,}555^2} = 11{,}004\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{7{,}555}{8{,}0} = 0{,}944\,; \qquad \varphi = 43^\circ$$

Që t'i caktojmë forcat në shkopinjtë në parmakun e dhënë, në mënyrë fiktive i caktojmë shkopinjtë S_1 *dhe* S_7 (prerja *I-I*) dhe e vëzhgojmë baraspeshën në pjesën e majtë të prerjes së parmakut.

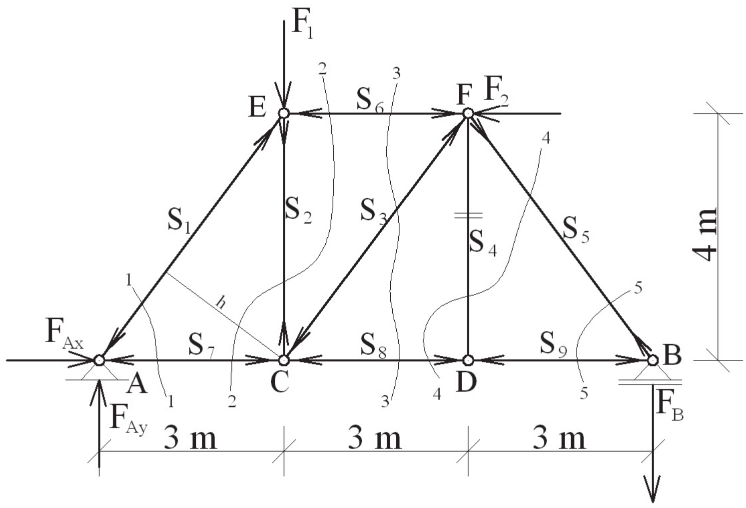


Fig. 150

$$\sum M_C = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 3 - S_1 \cdot h = 0$$

$$S_1 = \frac{F_{Ay} \cdot 3}{h} = \frac{7{,}555 \cdot 3}{2{,}4} = 9{,}444\,kN$$

$$\sum M_E = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 3 - F_{Ax} \cdot 4 + S_7 \cdot 4 = 0$$

$$S_7 = \frac{-F_{Ay} \cdot 3 + F_{Ax} \cdot 4}{4} = \frac{-7{,}555 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{4} = 2{,}333\,kN$$

$$tg\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}333; \qquad \alpha = 53^\circ$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{3}; \qquad h = 3 \cdot \sin\alpha = 3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4\,m$$

Më tej i presin shkopinjtë S_6, S_2 *dhe* S_7 (prerja 2-2) dhe vëzhgojmë baraspeshën në pjesën e majtë të prerjes së parmakut:

$$\sum M_C = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 3 - S_6 \cdot 4 = 0$$

$$S_6 = \frac{F_{Ay} \cdot 3}{4} = \frac{7{,}555 \cdot 3}{4} = 5{,}666\,kN$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 3 - S_6 \cdot 4 + S_2 \cdot 3 = 0$$

$$S_2 = \frac{-F_1 \cdot 3 + S_6 \cdot 4}{3} = \frac{-6 \cdot 3 + 5{,}66 \cdot 4}{3} = 1{,}555\,kN$$

Tash i presim shkopinjtë S_6, S_3 *dhe* S_8 (prerja 3 - 3) dhe vëzhgojmë baraspeshën në pjesën e majtë të prerjes së parmakut:

$$\sum M_F = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 6 - F_{Ax} \cdot 4 - F_1 \cdot 3 - S_8 \cdot 4 = 0$$

$$S_8 = \frac{F_{Ay} \cdot 6 - F_{Ax} \cdot 4 - F_1 \cdot 3}{4} = \frac{7{,}555 \cdot 6 - 8 \cdot 4 - 6 \cdot 3}{4} = -1{,}166\,kN$$

Parashenja negative tregon se kahja e supozuar e forcës S_8 nuk është e saktë, por e kundërt. Domethënë, në shkopin *S* ekziston forca e shtypjes.

$$\sum M_D = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 6 - F_1 \cdot 3 - S_6 \cdot 4 - S_3 \cdot h = 0$$

$$S_3 = \frac{F_{Ay} \cdot 6 - F_1 \cdot 3 - S_6 \cdot 4}{h} = \frac{7{,}555 \cdot 6 - 6 \cdot 3 - 5{,}666 \cdot 4}{2{,}4} = 1{,}944\,kN$$

Në këtë prerje (3 - 3) do të bëjmë kontroll të vlerave të llogaritura për S_6, S_3 *dhe* S_8 me supozim se pjesa e majtë e parmakut fillestar është mënjanuar, prandaj do ta mësojmë baraspeshën në pjesën e djathtë:

$$\sum M_C = 0$$

$$-F_2 \cdot 4 + F_B \cdot 6 + S_6 \cdot 4 = 0$$

$$S_6 = \frac{F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 6}{4} = \frac{8 \cdot 4 - 1{,}555 \cdot 6}{4} = 5{,}666\,kN$$

$$\sum M_F = 0$$

$$F_B \cdot 3 - S_6 \cdot 4 = 0$$

$$S_6 = \frac{F_B \cdot 3}{4} = \frac{1{,}555 \cdot 3}{4} = 1{,}166\,kN$$

$$\sum M_D = 0$$

$$F_B \cdot 3 - F_2 \cdot 4 + S_3 \cdot h + S_6 \cdot 4 = 0$$

$$S_3 = \frac{-F_B \cdot 3 + F_2 \cdot 4 - S_6 \cdot 4}{h} = \frac{-1{,}555 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 5{,}666 \cdot 4}{2{,}4} = 1{,}944\,kN$$

Vlerat e forcave S_6, S_3 *dhe* S_8 janë të barabarta qoftë ta vëzhgojmë baraspeshën e pjesës së majtë ose të djathtë të prerjes 3 – 3 të parmakut.

Pastaj i presim shkopinjtë S_5, S_4 *dhe* S_8 (prerja 4 - 4) dhe e mësojmë baraspeshën e pjesës së djathtë të asaj prerjeje të parmakut:

$$\sum M_D = 0$$

$$F_B \cdot 3 - S_5 \cdot h = 0$$

$$S_5 = \frac{F_B \cdot 3}{h} = \frac{1{,}555 \cdot 3}{2{,}4} = 1{,}944\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$S_4 \cdot 3 = 0; \qquad S_4 = 0$$

Përfundimisht e i presim shkopinjtë S_8 dhe S_8 (prerja 5 - 5) dhe e mësojmë baraspeshën e pjesës së djathtë të prerjes së parmakut:

$$\sum M_F = 0$$

$$F_B \cdot 3 - S_9 \cdot 4 = 0$$

$$S_9 = \frac{F_B \cdot 3}{4} = \frac{1{,}555 \cdot 3}{4} = 1{,}166\,kN$$

Vërejtje:

Vetë zgjedhjen dhe radhën e prerjeve gjatë llogaritjes së forcave të shkopinjve i përvetësojmë në mënyrë të paramenduar, por nën kusht që të mos i presim më tepër se tri forca të panjohura dhe të njëjtat të mos bashkohen në një pikë.

7.5 METODA E NYJEVE

Metoda e nyjeve është metodë analitike për caktimin e forcave të shkopinjve te parmakët.

Pas caktimit të reaksioneve kalohet kah caktimi i forcave në shkopinj. Niset nga nyja "A" ku kemi vetëm dy shkopinj dhe forca të jashtme F_{Ay} dhe F_{Ax}, të cilat zbërthehen në dy forca të brendshme S_1 dhe S_7 sipas metodës së projeksionit. Për këtë qëllim prej përpara duhet të caktohen këndet, respektivisht funksionet e tyre trigonometrike. Kjo procedurë përsëritet për të gjitha nyjet me vërejtje se në çdo nyje mund të kemi më së tepërmi dy forca të panjohura (dy shkopinj, forcat e brendshme të të cilëve i caktojmë). Kjo del nga ajo se në disponim na jepen kushtet analitike $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$.

Detyra nr. 54 Sipas metodës së nyjeve të caktohen forcat në shkopinjtë në parmakun e dhënë (fig. 151)

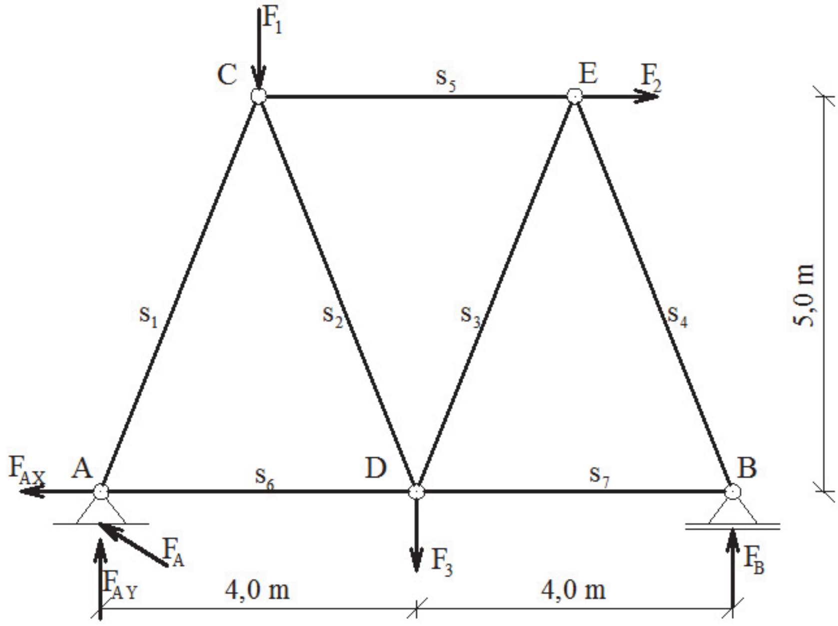


Fig. 151

$$F_1 = 5{,}0\,kN\,;\,F_2 = 4{,}0\,kN\,;\,F_3 = 6{,}0\,kN$$

Zgjidhje:
Analitike:

1. Caktimi i reaksioneve

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 4 - F_B \cdot 8 = 0$$

$$F_B = \frac{F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 4}{8} = \frac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 4}{8} = 6{,}75\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 8 - F_1 \cdot 6 - F_3 \cdot 4 + F_2 \cdot 5 = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{F_1 \cdot 6 + F_3 \cdot 4 - F_2 \cdot 5}{8} = \frac{5 \cdot 6 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 5}{8} = 4{,}25\,kN$$

$$\sum X = 0$$

$$-F_{Ax} + F_2 = 0\,; \quad F_{Ax} = F_2 = 4\,kN$$

kontrolli:

$$\sum Y = 0$$

$$F_{Ay} - F_1 - F_3 + F_B = 0$$

$$4{,}25 - 5 - 6 + 6{,}75 = 0$$

$$0 = 0$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{4^2 + 4{,}25^2} = 5{,}836\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{4{,}25}{4} = 1{,}0625 \qquad \varphi = 46^\circ$$

2. Caktimi i forcave në shkopinj

Nyja "A"

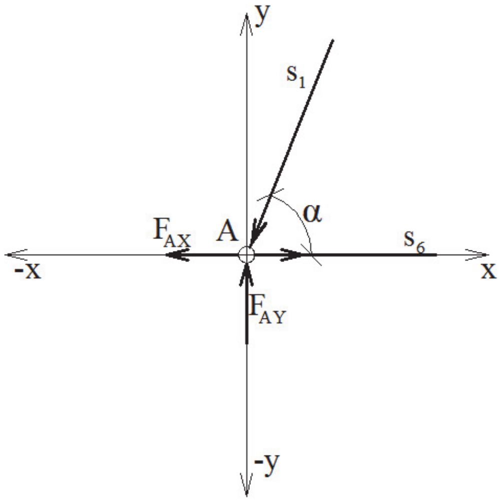


Fig. 152

$$tg\alpha = \frac{5}{2} = 2{,}5$$
$$\alpha = 68{,}2$$
$$\sin\alpha = 0{,}9284$$
$$\cos\alpha = 0{,}3714$$

$\Sigma Y = 0$

$$F_{Ay} - S_1 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$S_1 = \frac{F_{Ay}}{\sin\alpha} = \frac{4{,}25}{0{,}9284}$$
$$S_1 = 4{,}58kN$$

$\Sigma X = 0$

$$-F_{Ax} - S_1 \cdot \cos\alpha + S_6 = 0$$
$$-4 - 4{,}58 \cdot 0{,}3714 + S_6 = 0$$
$$-4 - 1{,}70 + S_6 = 0$$
$$S_6 = 5{,}70kN$$

Nyja "C"

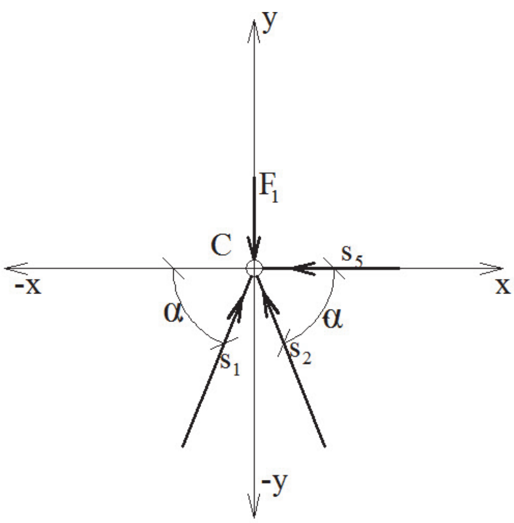


Fig. 153

$\Sigma X = 0$

$$S_1 \cdot \cos\alpha - S_2 \cdot \cos\alpha - S_5 = 0$$
$$4{,}58 \cdot 0{,}3714 - 0{,}81 \cdot 0{,}3741 - S_5 = 0$$
$$S_5 = 1{,}40kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$S_1 \cdot \sin\alpha + S_2 \cdot \sin\alpha - F_1 = 0$$
$$4{,}58 \cdot 0{,}9284 + S_2 \cdot 0{,}9284 - 5 = 0$$
$$S_2 = \frac{0{,}75}{0{,}9284} = o{,}808kN$$

Nyja "D"

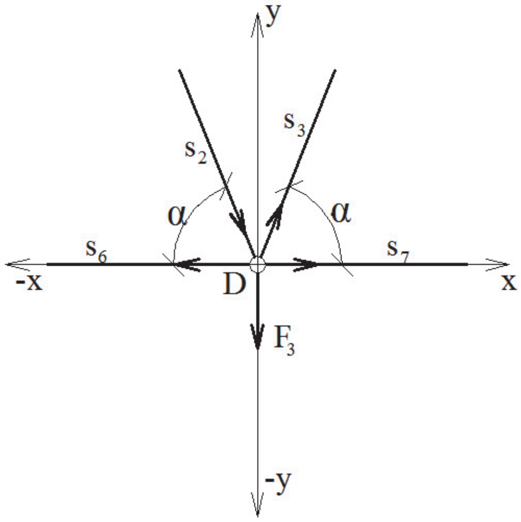


Fig. 154

$$\Sigma X = 0$$

$$-S_6 + S_7 + S_2 \cdot \cos\alpha + S_3 \cdot \cos\alpha = 0$$

$$-5{,}70 + S_7 + 0{,}808 \cdot 0{,}3714 + 7{,}27 \cdot 0{,}3714 = 0$$

$$-5{,}70 + S_7 + 3{,}0 = 0$$

$$S_7 = 2{,}70kN$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$-F_3 - S_2 \cdot \sin\alpha + S_3 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$-6 - 0{,}808 \cdot 0{,}9284 + S_3 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$S_3 \frac{6{,}752}{0{,}9284} = 7{,}27kN$$

Nyja "B"

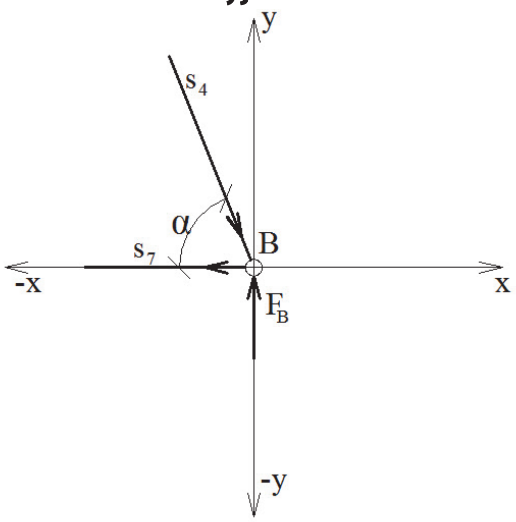


Fig. 155

$\Sigma Y = 0$

$$F_B - S_4 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$6{,}75 - S_4 \cdot 0{,}9284 = 0$$

$$-S_4 = \frac{-6{,}75}{0{,}9284} \cdot / -1$$

$$S_4 = 7{,}27 kN$$

$\Sigma X = 0$

$$-S_7 + S_4 \cdot \cos\alpha = 0$$

$$S_4 = \frac{S_7}{\cos\alpha} = \frac{2{,}70}{0{,}3714}$$

$$S_4 = 7{,}27 kN$$

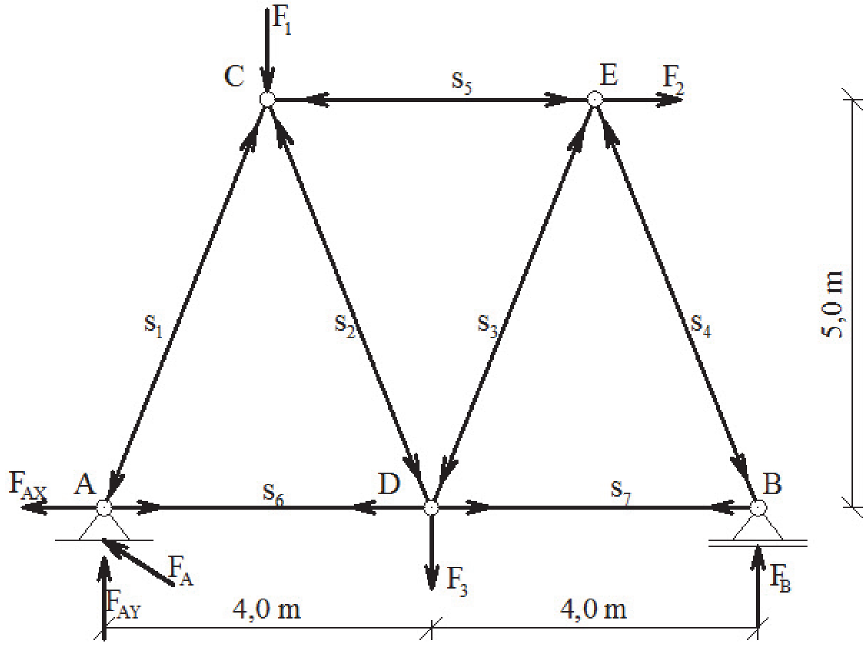


Fig. 156

Detyra nr. 55 Sipas metodës së nyjeve të caktohen forcat në shkopinjtë në parmakun e dhënë (fig. 157)

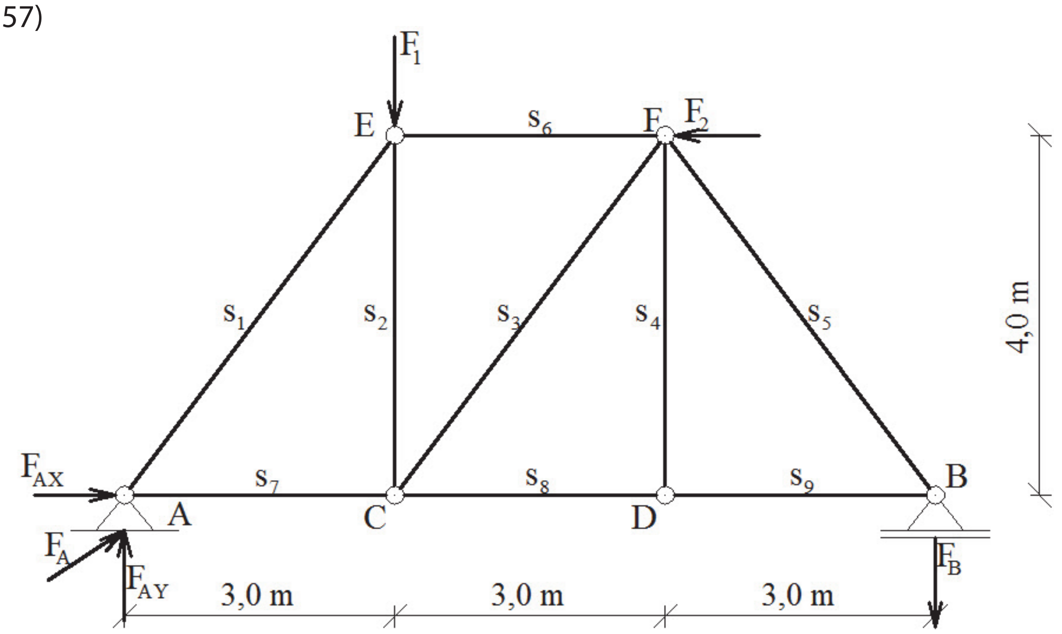


Fig. 157

$$F_1 = 6{,}0 kN ; F_2 = 8{,}0 kN$$

1. Caktimi i reaksioneve

$$\sum M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 9 = 0$$

$$F_B = \frac{F_2 \cdot 4 - F_1 \cdot 3}{9} = \frac{6 \cdot 3 - 8 \cdot 4}{9} = -1{,}555\,kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$F_{Ay} \cdot 9 - F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 4 = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{F_1 \cdot 6 + F_2 \cdot 4}{9} = \frac{6 \cdot 6 + 8 \cdot 4}{9} = 7{,}555\,kN$$

kontrolli:

$$\sum Y = 0$$

$$F_{Ay} - F_1 - F_B = 0$$

$$7{,}555 - 6 - 1{,}555 = 0$$

$$7{,}555 = 7{,}555$$

$$\sum X = 0$$

$$F_{Ax} - F_2 = 0$$

$$F_{Ax} = F_2 = 8{,}0\,kN$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{8^2 + 7{,}555^2} = 11{,}004\,kN$$

$$tg\varphi = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{7{,}555}{8{,}0} = 0{,}944\,; \qquad \varphi = 43^\circ$$

2. Caktimi i forcave në shkopinj

Nyja "A"

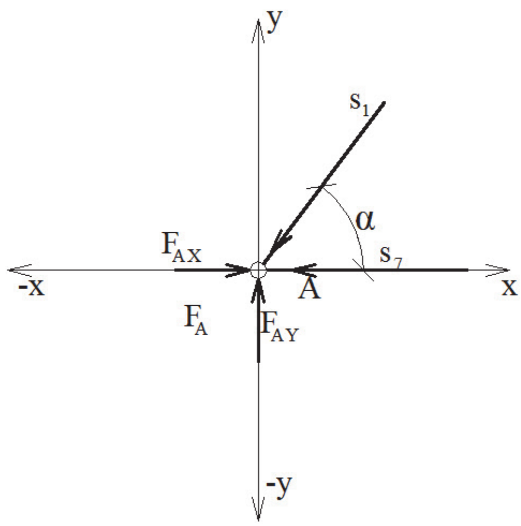


Fig. 158

$$tg\alpha = \frac{4}{3} = 0{,}333$$

$$\alpha = 53{,}13$$

$$\sin\alpha = 0{,}8$$

$$\cos\alpha = 0{,}6$$

$\Sigma X = 0$

$$F_{Ax} - S_1 \cdot \cos\alpha - S_7 = 0$$
$$8 - S_1 \cdot 0{,}6 - S_7 = 0$$
$$8 - 9{,}45 \cdot 0{,}6 - S_7 = 0$$
$$8 - 5{,}67 - S_7 = 0$$
$$S_7 = 2{,}33kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$F_{Ay} - S_1 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$7{,}56 - S_1 \cdot 0{,}8 = 0$$
$$S_1 = \frac{7{,}56}{0{,}8} = 9{,}45kN$$

Nyja "E"

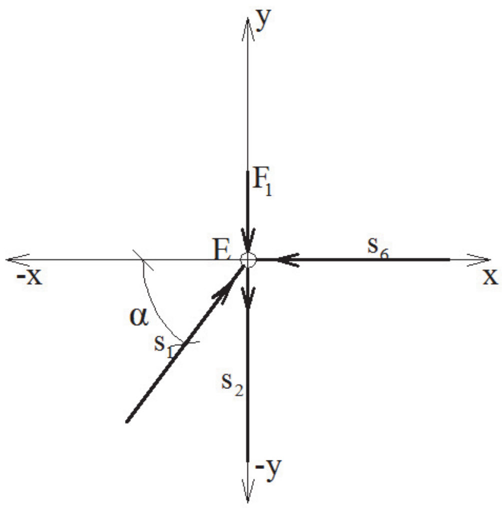


Fig. 159

$\Sigma X = 0$

$$S_1 \cdot \cos\alpha - S_6 = 0$$
$$9{,}45 \cdot 0{,}6 - S_6 = 0$$
$$-S_6 = -5{,}67kN \cdot / -1$$
$$S_6 = 5{,}67kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$-F_1 - S_2 + S_1 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$-6 - S_2 + 9{,}45 \cdot 0{,}8 = 0$$
$$-6 - S_2 + 7{,}56 = 0$$
$$S_2 = 1{,}56kN$$

Nyja "C"

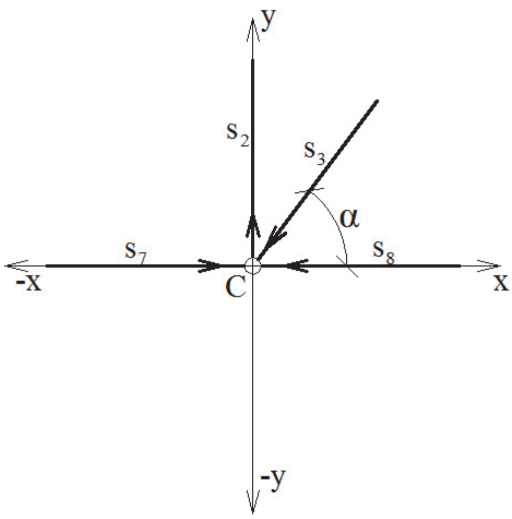


Fig. 160

$$\Sigma X = 0$$
$$S_7 - S_8 - S_3 \cdot \cos\alpha = 0$$
$$2{,}33 - S_8 - 1{,}95 \cdot 0{,}6 = 0$$
$$2{,}33 - S_8 - 1{,}17 = 0$$
$$S_8 = 1{,}16kN$$

$$\Sigma Y = 0$$
$$S_2 - S_3 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$1{,}56 - S_3 \cdot 0{,}8 = 0$$
$$-S_3 = -\frac{1{,}56}{0{,}8} \cdot / -1$$
$$S_3 = 1{,}95kN$$

Nyja "D"

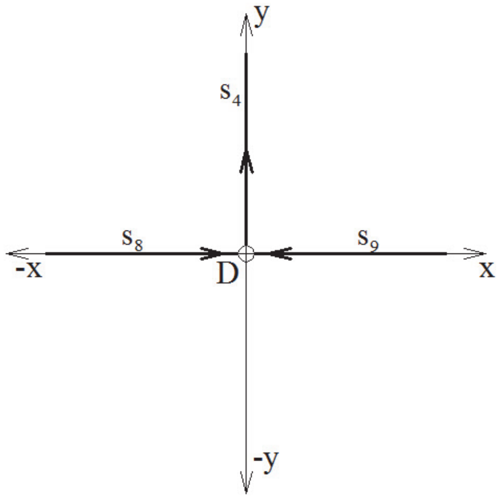


Fig. 161

$$\Sigma X = 0$$
$$S_8 - S_9 = 0$$
$$S_9 = S_8 = 1{,}16kN$$

$$\Sigma Y = 0$$
$$S_4 = 0$$

Nyja "B"

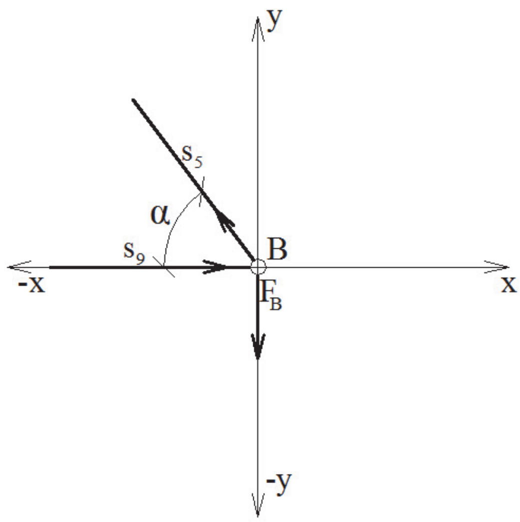


Fig. 162

$\Sigma X = 0$

$$S_9 - S_5 \cdot \cos\alpha = 0$$
$$1{,}16 - S_5 \cdot \cos\alpha = 0$$
$$S_5 = 1{,}93 kN$$

$\Sigma Y = 0$

$$-F_B + S_5 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$-1{,}56 + S_5 \cdot 0{,}8 = 0$$
$$S_5 = \frac{1{,}56}{0{,}8}$$

Mbaj mend:

Mbajtësit e parmakëve janë përbërë prej shkopinjve të palëvizshëm midis tyre të lidhur me lidhës (pa fërkim) në trekëndësh.

Më shpesh përdoren për konstruksione të çative, urave dhe vinçave (kraneve), por mund të përpunohen prej drurëve, çelikut dhe betonit të armiruar.

Ngarkesa te parmakët mund të jetë vertikale, horizontale dhe e pjerrët.

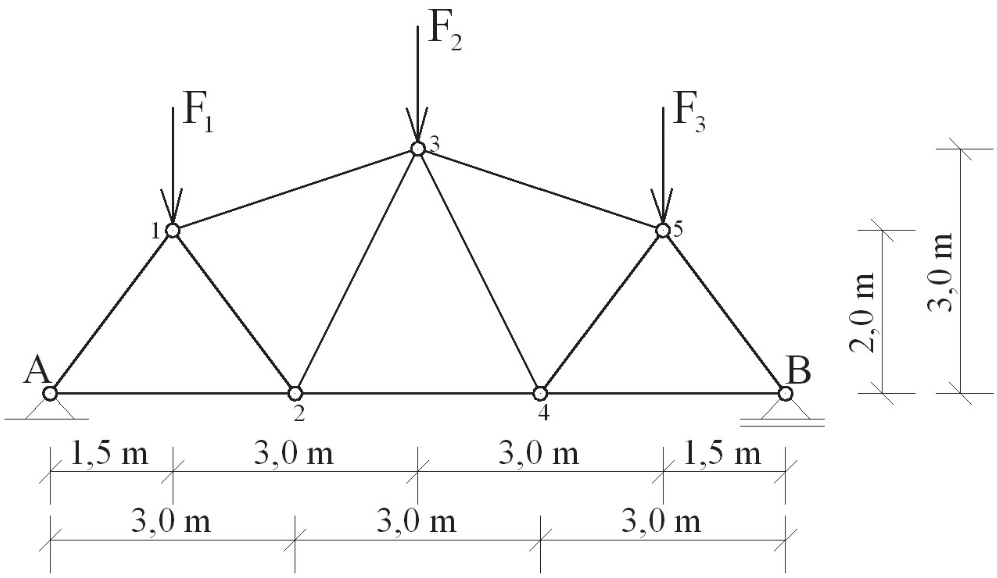
Për caktimin e forcave të shkopinjve do t'i përdorim metodën e Kremonit (metodën grafike), metodën e Riterit dhe metodën e nyjeve (metodën analitike).

Detyra për vetëvlerësim:

1. Cilët mbajtës i quajmë mbajtës të parmakëve?
2. Me çfarë ngarkese mund të jenë mbajtësit e parmakëve?
3. Cilën nyje e quajmë të thjeshtë, e cilën të përbërë?
4. Ku gjejnë zbatim më të madh mbajtësit e parmakëve?
5. Prej cilit material shpesh bëhen mbajtësit e parmakëve?
6. Numëroji metodat për caktimin e forcave në shkopinj te mbajtësit e parmakëve!

Detyra për ushtrim:

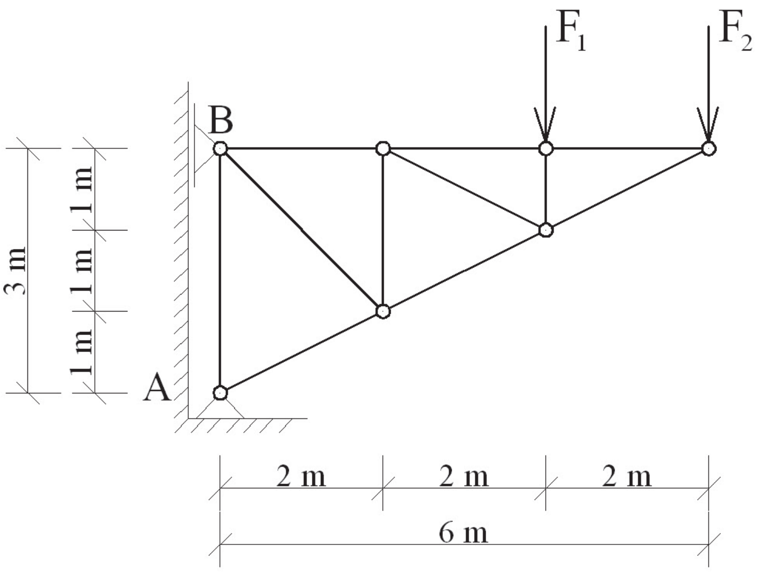
Detyra nr. 1 Të caktohen forcat në shkopinjtë sipas metodave të Kremonit, Riterit dhe metodës së nyjeve.



$F_1 = 5\ kN$
$F_2 = 10\,kN$
$F_3 = 7\,kN$

Fig. 163

Detyra nr. 2 Të caktohen forcat në shkopinjtë sipas metodave të Kremonit, Riterit dhe metodës së nyjeve



$F_1 = 3\,kN$
$F_2 = 6\,kN$

Fig. 164

LITERARURA

1. Rashkoviq, Mekanika - statika 1, botimi 9, Beograd 1971
2. Dr. Inxh. Jordan Milladinov, Mekanika teknike 1, botimi i dytë, Shkup 1968
3. Inxh. dipl. Tiberie Kirijas, Mekanika teknike, statika, Shkup 1972
4. Inxh. dipl. i ndër. Bella Duliq, Mekanika teknike - statika, Prosvetno dello, Shkup 1988
5. Inxh. dipl. i ndër. Mice Micoski, Përmbledhje detyrash të zgjidhura nga Mekanika teknike, Tramontana 1999